
Normering:

$1a : 2;$ $2a : 4;$ $3a : 2;$ $4a : 3;$ $5 : 6;$ $6 : 3;$
 $b : 1;$ $b : 3;$ $b : 3;$ $b : 1;$
 $c : 2;$ $c : 2;$ $c : 4.$

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{4}$.

Een beknopte uitwerking van het tentamen staat op 30 maart op
www.math.vu.nl/~anvardy en op www.math.vu.nl/~freek

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal alle oplossingen van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (b) Bepaal alle oplossingen van de homogene vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (c) Toon aan dat voor iedere $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ oplosbaar is.

2. De elementaire matrices E_1, E_2, E_3 en E_4 worden gegeven door:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bepaal voor $A = E_1 E_2 E_3 E_4$ de matrix A^{-1} .

~~diff~~ (b) Zij $B = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ 0 & E_3 \end{bmatrix}$. Toon aan dat $B^{-1} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -E_1^{-1} E_2 E_3^{-1} \\ 0 & E_3^{-1} \end{bmatrix}$.

Z.O.Z.

3.

$$\text{Zij } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Van de lineaire transformatie $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven dat $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$, $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.

(a) Bereken $T(\mathbf{e}_1)$.

Hint: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$.

(b) Bepaal de standaard matrix A van de transformatie T . (Dus bepaal A zó dat voor alle $\mathbf{x}$ geldt $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.)

(c) Bepaal $\mathbf{x}$ zó dat $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$.

4. Zij $A(t)$ de matrix die voor ieder reëel getal t gegeven wordt door

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{en zij } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Toon aan dat de determinant van $A(t)$ gelijk is aan $t^2 + t - 2$.

(b) Voor welke waarden van t is $A(t)$ een inverteerbare matrix?

~~Alle~~ (c) Los de vergelijking $A(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}$ op voor **alle** waarden van t .

5. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld. Met A en B worden steeds matrices met reële elementen aangeduid.

(a) A is een 5×4 matrix. Als $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ géén vrije variabele heeft, dan heeft $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voor iedere $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ precies één oplossing.

(b) Voor alle $m \times m$ ($m > 1$) matrices A en B geldt: Als A , B en $A+B$ inverteerbaar zijn, dan is $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

(c) Voor alle $m \times m$ ($m > 1$) matrices A en B geldt dat uit $AB = 0$ en $A \neq 0$ volgt dat $B = 0$.

↪ (d) Zij A een $m \times n$ matrix en $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ vectoren in $\mathbb{R}^n$. Als $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_p\}$ lineair onafhankelijk zijn, dan zijn ook $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ lineair onafhankelijk.

(e) Voor iedere matrix A geldt dat $\det AA^T \geq 0$.

~~sehr~~ (f) Ieder systeem van twee vergelijkingen met twee onbekenden dat een oplossing heeft, kan worden opgelost met de regel van Cramer.

6. Zij V de vectorruimte die bestaat alle veeltermen (=polynomen) $p(t)$ van de graad ten hoogste 3 met de gewone puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Zij $W = \{p(t) \in V : p(1) = 0\}$. Toon aan dat W een lineaire deelruimte van V is.