



Normering:

$$\begin{array}{llllll} 1a:1 &; & 2a:3 &; & 3:5 &; & 4:10 &; & 5a:1 &; & 6a:2 &; \\ b:2 &; & b:2 &; & & & & & b:3 &; & b:3 &; \\ c:3 &; & c:2 &; & & & & & c:2 &; & &; \\ d:2 &; & d:2 &; & & & & & & & &; \\ e:2 & . & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{5}.$$

1. Zij $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- (a) Toon aan dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A .
- (b) Toon aan dat $\lambda = 3$ een eigenwaarde is van A .
- (c) Bepaal de determinant van A en de eigenwaarden van A .
- (d) Toon aan dat A diagonaliseerbaar is.
- (e) Bepaal een diagonaalmatrix E en een inverteerbare matrix S zó dat $A - I_3 = SES^{-1}$. (I_3 is de 3×3 eenheidsmatrix).

2. Zij $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Bepaal een orthogonale basis voor de nulruimte van A .
- (b) Bepaal een orthonormale basis voor de kolomruimte $\text{Col } A$.
- (c) Bepaal de (orthogonale) projectie $\hat{\mathbf{b}}$ van $\mathbf{b}$ op $\text{Col } A$.
- (d) Bepaal een kleinste kwadraten oplossing $\hat{\mathbf{x}}$ van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. Los op

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) - x_2(t), \\ x_2'(t) &= 2x_1(t), \\ x_1(0) &= 1, \\ x_2(0) &= 2. \end{cases}$$

Z.O.Z.

4. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
 - (a) Als de 2×2 matrix A alleen de eigenwaarde 1 heeft, dan is de karakteristieke vergelijking van A de vergelijking $(1 - \lambda)^2 = 0$.
 - (b) Zij A een $m \times n$ matrix en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dan is er precies één $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ zó dat $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|$ minimaal is.
 - (c) Voor iedere $m \times n$ matrix A geldt dat de matrix $A^T A$ uitsluitend reële eigenwaarden heeft.
 - (d) Als een vierkante matrix Q orthogonale kolommen heeft, dan is de matrix Q inverteerbaar.
 - (e) Voor iedere matrix A geldt dat $(\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A$.
 - (f) Zij $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{R}^n$. Dan wordt de orthogonale projectie van een vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ op W gegeven door $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2$.
5. Zij $\mathbb{P}_3$ de vectorruimte van de polynomen van de graad ten hoogste 3 (inclusief het 0-polynoom). Zij $W = \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(1) = 0\}$ de deelruimte van de polynomen die in 1 de waarde 0 aannemen. Zij $p_1(t) = t - 1$, $p_2(t) = t^2 - t$ en $p_3(t) = t^3 - t^2$. Zij $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ en zij $q(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$.
 - (a) Toon aan dat $q \in W$.
 - (b) Toon aan dat $\mathcal{B}$ een basis is voor W .
 - (c) Bepaal de coördinaten van het polynoom q ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.
6. Gegeven zijn de vierkante matrices A en B zó dat $AB = BA$. Toon aan:
 - (a) Als A en B symmetrisch zijn, dan is ook AB symmetrisch.
 - (b) Als A en B beide orthogonaal diagonaliseerbaar zijn, dan is ook AB orthogonaal diagonaliseerbaar.