

1. a)  $A \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3/2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \underline{v}$  dus  $\underline{v}$  is een e.v. van  $A$  behorende bij de e.w.  $\lambda = 1$ .

b) We bepalen de nulruimte van  $A - 3I_3$  (die moet niet-triviaal zijn):

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3/2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 vrije variabele; dus 1-dim. spanruimte bij de e.w.  $\lambda = 3$ . Neem als (enige) basisvector voor  $\lambda$  die e.t. bijv.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

c)  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3/2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3/2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot -2 = 3$

Men kan ook de 3<sup>e</sup> e.v. (die nu moet zijn!) weer 1 moeten zijn (vgl. ook het spoor van  $A$ )  
d)  $A$  kan nu alleen nog diagonalen zijn als de e.t. bij  $\lambda = 1$  2-dim. is:

$$A - 1I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 vrije variabelen; dus 2-dim nulruimte; opspannen door  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  en bijv. nog  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
Dus 3 lin. onafh. e.v., dus basis van e.v.  $A$  is diagonaliseerbaar.

e) Gevraagd is in te zien dat elke e.v. van  $A$  bij e.w.  $\lambda$  ook een e.v. is van  $A - I_3$ ; maar dan bij de e.w.  $\lambda - 1$   
Dus  $A - I_3$  is ook diagonaliseerbaar; want dezelfde basis van e.v.  $A$  is ook basis van  $A - I_3$ .  
Neem bijv.  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  en  $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   
Levera niet bij  $A - I_3$  het konstant. polynoom bepalen (dat is mij veel werk). Maar het mag natuurlijk wel.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2-dim nulruimte (want 2 vrije variabelen) wel als basis bijv.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . M.k.v. Gram-Schmidt nog een 1 teken. Dan wordt de 2<sup>e</sup> basisvector:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Ook  $A$  is 2-dim (2 pivots). Neem dan 2 onafh. kolommen uit  $A$ ; bijv.  $\underline{a}_1$  en  $\underline{a}_2$ . Welke een mogelijke:  $\underline{a}_1 \perp \underline{a}_2$ . Alleen nog een normaliseren:

$$\frac{1}{5} \underline{a}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{10}} \underline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \underline{\hat{x}} = \frac{\langle \underline{\hat{x}}, \underline{a}_1 \rangle}{\langle \underline{a}_1, \underline{a}_1 \rangle} \underline{a}_1 + \frac{\langle \underline{\hat{x}}, \underline{a}_2 \rangle}{\langle \underline{a}_2, \underline{a}_2 \rangle} \underline{a}_2 = \frac{10}{25} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

d) Men kan natuurlijk de gemiddelde vgl. bepalen en optreken; maar nu we  $\underline{\hat{x}}$  weten bepaald hebben kunnen we weten dat een gvl van  $A \underline{\hat{x}} = \underline{\hat{b}}$  overeenkomt door  $\underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (De  $\underline{\hat{x}}$  is natuurlijk veel meer)

3. bij  $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  dan zijn de e.w. van  $A$ :  $\lambda_1 = -2$  en  $\lambda_2 = -1$  (imm.  $\lambda_1 + \lambda_2 = -3$  en  $\lambda_1 \lambda_2 = 2$ )

Nu de bijbehorende e.v.:  
 $\lambda_1 = -2$ :  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  dan bijv.  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$   
 $\lambda_2 = -1$ :  $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  dan bijv.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
Nu  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  dan  $P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$   
en  $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  en dan gew. gvl.  
 $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

4. a) Waar: Het karakt. polynoom is van de 2<sup>e</sup> graad en heeft alleen 1 als reël nulpkt. Dan moet dat polynoom wel liden  $(1-x)^2$ .
- b) Onwaar: Er kunnen oneindig veel oplossingen zijn. Neem bijv.  $A = 0$  en  $b = 0$ ; dan voldoet elke  $\hat{x}$ .
- c) Waar:  $A^T A$  is immers symmetrisch; en een symm. matrix heeft intsb. reële e.w.
- d) Onwaar:  $Q$  zou kolommen kunnen hebben die gelijk zijn aan de 0-vector.
- e) Onwaar:  $\text{Nul } A \subset \mathbb{R}^n$  en  $(\text{Col } A)^\perp \subset \mathbb{R}^m$ .
- f) Onwaar: dit gaat zeker mis als  $v_1 = 0$  v  $v_2 = 0$  maar ook als bijv.  $v_1 = v_2$  etc.

5. a)  $q(1) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$  dus  $q \in W$
- b) Elke  $p_i \in W$ ; reken  $p_i(1)$  maar uit.  
 $B$  is onafh. vers.:  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  heeft 3 pivots  
 $\dim W < \dim P_3 = 4$   
 Dus  $B$  is een basis voor  $W$ .
- c) Gevoel dat proberen:  $[q]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 (of door oplossen v/c stelsel)

6. a)  $(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB$
- b) Als  $A$  en  $B$  orthog. diag. dan moeten ze symm. zijn.  
 Maar dan vlgm a) ook  $AB$  symm.  
 Maar dan vlgm Spectraalst. ook  $AB$  orthog. diag.