

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Stop maar; dit stelsel is inconsistent; dus geen oplossingen.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1 vrije variabele (x_2). Algemeen op. van $A\underline{x} = \underline{b}$: $\underline{x} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($x_2 \in \mathbb{R}$)

c) 1 particuliere oplossing zie je meteen: $\underline{x} = \underline{b}$
De algemene oplossing van $A\underline{x} = A\underline{b}$ is dus: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($x_2 \in \mathbb{R}$)

2. We bekijken de beeld van E_1 en E_2 onder T :

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus $T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dus $T(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dus $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a) Alle 4 vectoren v_1, t_1, v_4 hebben gelijke 3^{de} en 4^{de} coördinaat. Kan dan voor $\underline{t}$ een vector uit $\mathbb{R}^4$ kiezen $t_3 \neq t_4$; bijv. $\underline{t} = E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Neem voor $\underline{v}$ de vector $\underline{t}$ uit onderdeel a).

De matrix $(v_1, v_2, v_3, v_4, \underline{t})$ heeft 4 pivots (en 4 rijen). Om de determinant van deze matrix spanning teel $\mathbb{R}^5$ op.

c) v_2 is geen veelvoud van v_1 , dus niet afk. v.d. voorganger.

$v_3 = v_1 - 2v_2$ dus niet afk. van 2^{de} voorganger.

v_4 niet afk. v.d. voorganger: (v_1, v_2, v_3, v_4) heeft 3 pivots.

$v = \underline{t}$ is volgens a) geen lin. comb. v/d voorganger.

4. a) Antwoord: $\{\underline{0}, E_1\}$ is een afk. stelsel in $\mathbb{R}^n$, want $\underline{0}$ zit altijd, maar E_1 geen lin. comb. v/d voorganger.

b) Waar: Stel $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. onafh. en stel

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \underline{0}$. Dan $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (want $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. onafh.)

Dus $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ dus ook $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ lin. onafh. De andere implicatie gaat niet zo.

c) Antwoord: Neem bijv. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

d) Waar: (i) $\underline{0} \in H$ want $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 0 + 0 = 0$

(ii) Stel $x, y \in H$ dan $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$

Maar dan $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$

dus $\underline{x} + \underline{y} \in H$.

(iii) Stel $\underline{x} \in H$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 0$

en dus $\lambda(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 0$

dus $\lambda \underline{x} \in H$

5. a) Als X een $n \times p$ -matrix is en Y een $n \times p$ -matrix dan past het in lemma 11 en V is met de gewenste afmetingen uit.

b) Er moet gelden: $AX + BY = U$ en $CX + CY = V$

$= CY = V$ dus $Y = C^{-1}V$ (want C^{-1} bestaat)

en $AX = U - BY = U - BC^{-1}V$ dus

$X = A^{-1}(U - BC^{-1}V)$. (want A^{-1} bestaat)

6. a) $x_2 = \frac{\det A_2(\underline{b})}{\det A} = \frac{-1}{1} = -1,$

want $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{en} \quad \det A_2(\underline{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1.$$

b) Bedenk dat b_{23} de 2^e coördinaat is van de opl. van $A\underline{x} = \underline{e}_3$ dus precies de x_2 uit onderdeel a). Dus $b_{23} = -1$.

Nog even m.b.v. determinanten en cofactoren:

$$b_{23} = \frac{C_{32}}{\det A} = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

7. a) $\det A = \det B = 1$ dus A en B zijn beide inverteerbaar. Neem $C_1 = B^{-1}A$ en $C_2 = A^{-1}B$

dan $BC_1 = BB^{-1}A = (BB^{-1})A = I_3 A = A$ en

$$AC_2 = AA^{-1}B = B$$

b) $C_3 B = C_3(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3) = (C_3 \underline{b}_1, C_3 \underline{b}_2, C_3 \underline{b}_3).$

Wat C_3 ook is, $C_3 \underline{b}_3 = \underline{0}$; er kan dus nooit A uitkomen.

$$C_4 A = C_4(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = (C_4 \underline{a}_1, C_4 \underline{a}_2, C_4 \underline{a}_3).$$

Wat C_4 ook is, $C_4 \underline{a}_1 = C_4 \underline{a}_2$; er kan dus nooit B uitkomen.