

Hertentamen Lineaire Algebra (Wisk/Nat), woensdag 20 augustus 2003, 13:30-16:30.

1. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bereken $\det(A)$.
- (b) Bepaal de dimensie van $\text{Col}(A)$ en de dimensie van $\text{Nul}(A)$, en geef een basis voor $\text{Col}(A)$.
- (c) Bepaal, m.b.v. de regel van Cramer, de derde coördinaat x_3 van de oplossing $\mathbf{x}$ van het stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

- (d) Bereken A^{-1} .

2. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat $\lambda = 0$ en $\lambda = 2$ de enige eigenwaarden van A zijn door het bepalen van de bijbehorende eigenruimten.
- (b) Waarom is A orthogonaal diagonaliseerbaar?
- (c) Bepaal een orthogonale matrix P en een diagonaal matrix D zo dat $A = PDP^{-1}$.
- (d) Bepaal de orthogonale projectie van de vector $\mathbf{b}$ op de eigenruimte bij de eigenwaarde $\lambda = 2$.
- (e) Bepaal de orthogonale projectie van de vector $\mathbf{c}$ op de eigenruimte bij de eigenwaarde $\lambda = 2$.

3. Zij $T: \mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ gegeven door

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(-3) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(3) \end{pmatrix}.$$

- (a) Toon aan: T is lineair.
- (b) Bepaal de matrix van T m.b.t. de basis $\{1, t, t^2, t^3\}$ voor $\mathbf{P}_3$ en de standaard basis voor $\mathbf{R}^4$.
- (c) Ga na of T 1-1 is; ga na of T op is.

Z.O.Z.

4. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Los het volgende beginwaarde probleem op:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- (a) Als $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, en $\mathbf{v}_3$ 3 vectoren in $\mathbf{R}^3$ zijn zo dat geen van deze vectoren een veelvoud is van één van de andere twee, dan zijn deze 3 vectoren lineair onafhankelijk.
- (b) Als W een deelruimte van $\mathbf{R}^3$ is dan hebben W en $W^\perp$ geen gemeenschappelijke elementen.
- (c) Als A 3×3 is en $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ heeft een unieke oplossing dan is A inverteerbaar.
- (d) Als $A^4 = 0$, dan is A niet inverteerbaar.
- (e) Als A $m \times n$ is en $\text{rang}(A) = m$ dan is de lineaire transformatie $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 1-1.
- (f) Als U een $n \times n$ orthogonale matrix is en $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ een orthonormale basis is voor $\mathbf{R}^n$, dan is $\{U\mathbf{v}_1, \dots, U\mathbf{v}_n\}$ ook een orthonormale basis is voor $\mathbf{R}^n$.

6.

- (a) Stel A is symmetrisch en $A = PRP^{-1}$ met P orthogonaal en R boven-driehoeks. Toon aan: R is symmetrisch (en dus diagonaal).
- (b) Stel B is een $m \times n$ matrix. Toon aan:
 - (i) B^TB is symmetrisch;
 - (ii) B^TB is positief semi definit;
 - (iii) als B $n \times n$ én inverteerbaar is, dan is B^TB zelfs positief definit.

Normering:

- 1a: 2, 1b: 3, 1c: 2, 1d: 3.
- 2a: 4, 2b: 1, 2c: 3, 2d: 2, 2e: 2.
- 3a: 2, 3b: 2, 3c: 3.
- 4: 7.
- 5: 10
- 6a: 3, 6b: 5.

Eindcijfer = totaal/6 + 1.