

1. a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) + 1(9-0) = 5.$

b) Daar $\det A \neq 0$ is A inverteerbaar dus de 3 kolommen van A zijn lin. onafh.

Dus $\dim \text{Col}(A) = 3$ en $\dim \text{Nul}(A) = n - r = 3 - 3 = 0$ en de 3 kolommen van A zijn een basis voor $\text{Col}(A)$.

c) $x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 13 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2(0-0) + 1(54-13)}{5} = \frac{25}{5} = 5.$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & -9/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & -9/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

dus $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & -9/5 & 6/5 \\ 3/5 & 6/5 & -4/5 \\ -1/5 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ Controle: I

2. a) e.t. bij $\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1-dim eigentruimte met basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

e.t. bij $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3-dim eigentruimte met basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Vervolg 2 a):

We hebben nu al 4 lin. onafh. e.v. dus de hoog is op. Er zijn geen andere e.v. meer.

2b) Omdat A symmetrisch (Spektreelstelling).

c) De 4 lin. onafh. e.v. bij onderdeel a) staan al $\perp$. Nog even normeren:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Dus $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(permutatie zijn mogelijk)

d) $\underline{1}$ is e.v. bij e.v. 0; staat dus $\perp$ op e.t. bij $\lambda = 2$ dus de orthog. proj. is $\underline{1}$ zelf.

e) $\underline{2}$ is e.v. bij $\lambda = 2$; ligt dus in de e.t. bij $\lambda = 2$ dus de orthog. proj. is de nul-vektor.

3. a) $T(\lambda p + \mu q) = \begin{pmatrix} \lambda p(-3) + \mu q(-3) \\ \lambda p(-1) + \mu q(-1) \\ \lambda p(1) + \mu q(1) \\ \lambda p(3) + \mu q(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p(-3) + \mu q(-3) \\ \lambda p(-1) + \mu q(-1) \\ \lambda p(1) + \mu q(1) \\ \lambda p(3) + \mu q(3) \end{pmatrix}$
 $= \lambda \begin{pmatrix} p(-3) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(3) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} q(-3) \\ q(-1) \\ q(1) \\ q(3) \end{pmatrix} = \lambda T(p) + \mu T(q).$

b) Reken de waarden van de 4 basis polynomen uit in $-3, -1, 1$ en 3 . Geef als matrix van T :

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$

3. c) stel $T(p) = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan heeft p in elk geval 4 nulpunten en $p \in \mathbb{P}_3$. Dan moet p LV 0-polynoom zijn. Dan is volgen en st. de lineaire T 1-1, en volgen en andere st. ook op. (Het mag ook allemaal via de gevonden matrix)

4. Geest e.v. en e.v. van A :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-4-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = -2.$$

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ 1-dim e.v. met basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\lambda = -2$: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ 1-dim e.v. met basis $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

alg. opl $\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$
 beginwaarde bij $t=0$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 + 3c_2 \end{pmatrix}$
 dan $c_2 = 1$ en dan $c_1 = -2$

Gevraagd opl. dan $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

5. a) Antw. Neem bijv. $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $(\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2)$

b) Antw. $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$.

c) Waar. Het stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$, heeft dan een vrije var. Dan elke kolom van A pivot- kolom, dan ~~in~~ in verkeerbaar (I.M.S.)

5. d) Waar. $\det A^3 = (\det A)^3 = 0$ dan $\det A = 0$ dan A niet inverteerbaar.

e) Antw. Neem $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan A is 1×2 en $\det A = 0$; maar $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ is niet 1-1 (bijv. $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

f) Waar. $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ is lineair en lineair. Dan te blijven onderling $\perp$ en worden $\perp$.

6. a) Bekijk dat $R = P^{-1}AP$ en dat $P^{-1} = P^T$ want P orthogonaal. Bovendien: $A^T = A$

Dan $R^T = (P^{-1}AP)^T = (P^TAP)^T = P^T A^T P^{TT} = P^T A P = P^{-1}AP = R$ dan $R^T = R$ dan R is symmetrisch.

b) (i) $(B^T B)^T = B^T B^{TT} = B^T B$

(ii) $\underline{x}^T B^T B \underline{x} = (\underline{x}^T B^T)(B \underline{x}) = (B \underline{x})^T (B \underline{x}) = \|B \underline{x}\|^2 \geq 0$ (voor iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)

(iii) Stel $\underline{x}^T B^T B \underline{x} = 0$ voor zeker $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
 Dan volgt uit (ii):

$\|B \underline{x}\|^2 = 0$ dan $\|B \underline{x}\| = 0$ dan $B \underline{x} = \underline{0}$. Daar B is vertelbaar

volgt nu: $\underline{x} = \underline{0}$

Dan $\underline{x}^T B^T B \underline{x} > 0$ voor ieder $\underline{x} \neq \underline{0}$.

(I.M.S.)