



Eerste deeltentamen Lineaire Algebra (Wisk/Nat)
en tentamen Lineaire Algebra I (ectr), maandag
24 maart 2003, 10:30-12:30.

1. Gegeven zijn de matrix A en de vector b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 13 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verklaar waarom de kolomruimte van A gelijk is aan $\mathbb{R}^3$.
- (b) Bepaal een verzameling van ten hoogste 4 vectoren die de nulruimte van A opspannen.
- (c) Bepaal alle oplossingen x van de vergelijking

$$Ax = b.$$

Een lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door $T(x) = Ax$.

- (d) Is de afbeelding T injectief (one-to-one)?
Is de afbeelding T surjectief (onto)?
Verklaar je antwoorden.

2. Gegeven zijn de matrix B en de vectoren x en c

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bepaal de determinant van B .
- (b) Los, met behulp van de formule van Cramer, x_2 op uit de vergelijking $Bx = c$.
- (c) Bepaal de inverse van B .

3. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- (a) Het vlak gegeven door de vergelijking $3x - y + 2z = 1$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^3$.
- (b) A is een $m \times n$ matrix. Als iedere rij van A een pivot positie bezit, dan zijn de kolommen van A onafhankelijk.
- (c) A en B zijn inverteerbare matrices. Als geldt $AB = BA$, dan geldt ook $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (d) Als $A^2B = 0$ en B is inverteerbaar, voor zekere 3×3 -matrices A en B , dan geldt $A = 0$ (Hierbij wordt met 0 de 3×3 nul-matrix bedoeld).

4. $M_{2 \times 2}$ is de vectorruimte van alle 2×2 matrices.
- (a) Definieer $S_{2 \times 2}$ als de verzameling van alle symmetrische 2×2 matrices (d.w.z. van alle 2×2 matrices A , waarvoor geldt $A = A^T$).
- (i) Toon aan dat $S_{2 \times 2}$ een deelruimte is van $M_{2 \times 2}$.
 - (ii) Geef een verzameling van ten hoogste 4 symmetrische matrices die de deelruimte $S_{2 \times 2}$ opspannen.
- (b) Zij A een vierkante matrix die te schrijven is als 2×2 -blokmatrix $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ met B en C beide vierkant ($p \times p$, respectievelijk $q \times q$). Toon aan: A is inverteerbaar $\Leftrightarrow B$ en C zijn inverteerbaar.

Normering:

- 1a: 2, 1b: 3, 1c: 3, 1d: 2.
- 2a: 2, 2b: 2, 2c: 3.
- 3: 9.
- 4a: 5, 4b: 5.

Eindcijfer = totaal/4 + 1.

Het 2de deeltentamen Lineaire Algebra voor studenten wiskunde/natuurkunde is op maandag 26 mei 2003.

Het herkansingstentamen Lineaire Algebra I voor studenten econometrie is op woensdag 20 augustus 2003 (evenals het herkansingstentamen Lineaire Algebra voor studenten wiskunde/natuurkunde).