

1. Gegeven zijn de matrix  $A$  en de vector  $\mathbf{b}$  door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- Verklaar waarom de kolomruimte van  $A$  gelijk is aan  $\mathbb{R}^3$ .
- Bepaal een basis voor de nulruimte van  $A$ .
- Bepaal alle oplossingen  $\mathbf{x}$  van:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Een lineaire afbeelding  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  wordt gedefinieerd door  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ .

- Is  $T$  injectief (one-to-one)? Is  $T$  surjectief (onto)?  
Verklaar je antwoorden.

2. Gegeven zijn de matrix  $B$  en de vectoren  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{c}$  door

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de determinant van  $B$ .
- Los  $x_2$  op, met behulp van de formule van Cramer, uit de vergelijking  $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ .
- Bepaal de inverse van  $B$ .

**Z.O.Z.**

3.  $\mathbb{P}_2$  is de vectorruimte van polynomen met graad ten hoogste 2, inclusief het nulpolynoom. De verzameling  $\mathcal{B}$  is gegeven door:

$$\mathcal{B} = \{1 + t, t + t^2, 2 - t^2\}.$$

- Toon aan dat  $\mathcal{B}$  een basis is voor  $\mathbb{P}_2$ .
  - Bepaal de overgangsmatrix (change-of-coordinates matrix) van  $\mathcal{B}$  naar de standaardbasis  $\{1, t, t^2\}$ .
  - Bepaal de coördinaatvector  $[p]_{\mathcal{B}}$  van  $p(t) = 1 + t + t^2$  t.o.v. de basis  $\mathcal{B}$ .
4. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- Het vlak met vergelijking  $x + 2y - 3z = 1$  is een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^3$ .
  - $A$  is een  $m \times n$  matrix. Als iedere rij van  $A$  een pivotpositie bevat, dan zijn de kolommen van  $A$  onafhankelijk.
  - $A$  en  $B$  zijn inverteerbare matrices.  
Als  $AB = BA$  dan geldt ook  $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

5. a)  $M_{2 \times 2}$  is de vectorruimte van alle  $2 \times 2$  matrices. We definiëren  $S_{2 \times 2}$  als de verzameling van alle symmetrische  $2 \times 2$  matrices (d.w.z. van alle  $2 \times 2$  matrices, waarvoor geldt  $A = A^T$ ). Laat zien dat  $S_{2 \times 2}$  een deelruimte is van  $M_{2 \times 2}$ .
- b) Gegeven is de vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  met  $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1$ . Definieer de matrices  $P$  en  $Q$  door

$$P = \mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad \text{en} \quad Q = I - 2P.$$

Bewijs:

- $P^2 = P$ .
- $P^T = P$ .
- $Q^2 = I$ .

#### Normering:

|          |          |          |       |          |
|----------|----------|----------|-------|----------|
| 1 : a) 3 | 2 : a) 2 | 3 : a) 2 | 4 : 5 | 5 : a) 4 |
| b) 2     | b) 2     | b) 1     |       | b) 5     |
| c) 2     | c) 3     | c) 3     |       |          |
| d) 2     |          |          |       |          |
| <hr/>    | <hr/>    | <hr/>    | <hr/> | <hr/>    |
| 9        | 7        | 6        | 5     | 9        |

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$