

Normering:

$1a:4$; $2a:3$; $3a:2$; $4a:2$; $5:14$; $6a:2$;
 $b:2$; $b:2$; $b:1$; $b:2$; $b:2$;
 $c:2$; $c:5$; $c:2$; $c:2$;
 $d:3$; $d:2$; $d:2$.

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{6}$.

1. Gegeven zijn de vectoren v_1 , v_2 , v_3 , z door

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Verder is $V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

- (a) Bepaal een orthonormale basis voor V .
- (b) Bepaal de orthogonale projectie van de vector z op V .

2. Voor ieder reëel getal k worden de matrix A_k en de vector b gegeven door

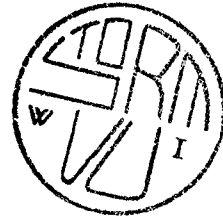
$$A_k = \begin{bmatrix} k & 1 & k \\ 2k-1 & 2+k & 2k-1 \\ 0 & k^2+1 & k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal voor het geval dat $k = 0$ alle kleinste kwadraten oplossingen van de vergelijking $A_k x = b$.
- (b) Bereken $\det A_k$ voor iedere $k \in \mathbb{R}$.
- (c) Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $A_k x = b$ tenminste één oplossing?
- (d) Toon voor $k \neq 0$ met de regel van Cramer aan dat de waarde van de derde component van de oplossing x van $A_k x = b$ gelijk is aan $\frac{k+1}{k}$.

Z.O.Z.

3. De matrix A en de vector v worden gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



- (a) Bepaal een basis voor de nulruimte van de matrix A .
 - (b) Ga na dat v een eigenvector van A is.
 - (c) Bepaal de eigenwaarden van A en geef voor iedere eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
 - (d) Ga na of A diagonaliseerbaar is.
4. Van de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ van de polynomen van de graad ten hoogste 2 inclusief het nulpolynoom geven we dat de dimensie 3 is. Verder geven we de polynomen $b_1(t) = -\frac{1}{2}t(t-1)$, $b_2(t) = -(t-1)(t+1)$ en $b_3(t) = \frac{1}{2}t(t+1)$ en de lineaire afbeelding $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ door voor iedere $p \in \mathbb{P}_2$ te bepalen

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}.$$

- (a) Toon aan dat $\{T(b_1), T(b_2), T(b_3)\}$ lineair onafhankelijk is.
 - (b) Toon aan dat T een injectieve (one-to-one) afbeelding is.
 - (c) Toon aan dat $\{b_1, b_2, b_3\}$ een basis is van $\mathbb{P}_2$.
5. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld. In het onderstaande zijn de natuurlijke getallen m en n steeds tenminste 2.
- (a) Gegeven is dat de $n \times n$ matrix A inverteerbaar is. Dan is de $n \times n$ matrix B inverteerbaar als en alleen als de matrix AB^T inverteerbaar is.
 - (b) Voor iedere $n \times n$ matrix A geldt $\det(4A^2) = 4(\det A)^2$.
 - (c) De $n \times n$ matrices A en A^T hebben dezelfde eigenwaarden.
 - (d) Als de $n \times n$ matrix A diagonaliseerbaar is dan heeft A onafhankelijke kolommen.
 - (e) De matrix $A^T A$ heeft uitsluitend reële eigenwaarden.
 - (f) Als de $n \times n$ matrix A niet inverteerbaar is, dan is 0 een eigenwaarde van A .
 - (g) Voor iedere $m \times n$ matrix A is de rijruimte orthogonaal op de kolomruimte van de matrix A^T .
6. Zij P een $n \times n$ matrix. Zij $Q = I - P$, waarbij I de $n \times n$ eenheidsmatrix is.
- (a) Toon aan dat $P^2 = P$ als en alleen als $Q^2 = Q$.
 - (b) Toon aan: als $x \in \text{Nul } Q$ dan $x \in \text{Col } P$.
Zij nu verder $P^2 = P$ (en dus ook $Q^2 = Q$).
 - (c) Toon aan: als $x \in \text{Col } P$ dan $x \in \text{Nul } Q$.
 - (d) Merk op dat uit (b) en (c) volgt dat $\text{Nul } Q = \text{Col } P$. Waarom geldt nu met dezelfde gegevens ook dat $\text{Nul } P = \text{Col } Q$?