1. a) Eerst $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ uitdunnen tot een basis.
Dat kan door schoonvegen, maar men ziet vrij snel:
$\underline{v}_3 = 3\underline{v}_1 - \underline{v}_2$; dus $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ is een basis voor V.
Nu Gram-Schmidt:
$\underline{u}_1 = \underline{v}_1$ en $\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \dfrac{\underline{v}_2 \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1} \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \dfrac{9}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Normeren geeft als ortho-normale basis voor V:
$\left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $\text{proj}_V \underline{z} = \dfrac{\underline{z} \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1} \underline{u}_1 + \dfrac{\underline{z} \cdot \underline{u}_2}{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_2} \underline{u}_2 = \dfrac{9}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{25}{25}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. a) Noem A_0 even A dan moeten we nu oplossen:
$A^T A \hat{\underline{x}} = A^T \underline{b}$ of wel $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{b}$

of wel $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, dus $\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ 3/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\det A_k = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 2k-1 & 2+k & 2k-1 \\ 0 & k^2+1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 2k-1 & 2+k & 0 \\ 0 & k^2+1 & k \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2k-1 & 2+k \end{vmatrix}$
$= k\left(2k + k^2 - (2k-1)\right) = k(k^2+1)$.

c) Voor $k = 0$ heeft $A\underline{x} = \underline{b}$ géén opl^e; zie bij a)
Voor $k \neq 0$ geldt $\det A_k \neq 0$ dus A_k is inverteerbaar
dus $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft dan precies 1 oplossing; en dus
ook tenminste één oplossing.

2. d) Voor $k \neq 0$ geldt volgens de regel van Cramer:
$x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2k-1 & 2+k & 1 \\ 0 & k^2+1 & 2 \end{vmatrix}}{\det A_k} = \dfrac{k(4+2k-k^2-1) - (2k-1)(2-k^2-1)}{k(k^2+1)} =$
$= \dfrac{3k + 2k^2 - k^3 - (2k - 2k^3 - 1 + k^2)}{k(k^2+1)} = \dfrac{k^3 + k^2 + k + 1}{k(k^2+1)} =$
$= \dfrac{(k+1)(k^2+1)}{k(k^2+1)} = \boxed{\dfrac{k+1}{k}}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dus een basis voor Nul A is bijv. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $A\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus $\underline{v}$ is
e.v. van A, bij de e.w. $\lambda = 4$.

c) Uit a) volgt $\lambda = 0$ is e.w. van A met e.r. nul A
Uit b) volgt $\lambda = 4$ is óók een e.w. van A.
Men kan nu het karakt. polynoom $\det(A - \lambda I)$ uitrekenen
(er blijkt $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda-4)^2$, maar men
kan gebruiken $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 8 =$ som v/d e.w.
In beide gevallen volgt $\lambda = 4$ is e.w. van A
met alg. multiplicteit 2. Wat is nu
de bijbehorende e.r.? Aldus: Bepaal Nul$(A - 4I)$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

heeft Nulruimte met dimensie 1, dus $\{\underline{v}\}$ is een basis voor de e.r. bij $\lambda = 4$.

d) A is niet diagonaliseerbaar, want de meetk. mult. van $\lambda = 4$ is kleiner dan de alg. mult. van $\lambda = 4$. Er is dus géén basis van e.v. van A te vinden.

4. a) $T(b_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ heeft rang 3; dus kolommen lin. onafh.

b) $T(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft dat het polynoom p tenminste 3 nulpt^n heeft. Daar p graad ten hoogste 2 heeft, is p dan dus het 0-polynoom. Maak dan is de lineaire afb. T injectief (St.)

c) Daar de beelden van b_1, b_2 en b_3 onder T lin. onafh zijn, zijn b_1, b_2 en b_3 dat zelf óók. Daar $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ vormen b_1, b_2 en b_3 een basis.

a) Gegeven: A inv. of wel $\det A \neq 0$.
Maar dan: $\det(AB^T) = \det A * \det B^T = \det A * \det B \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$; dus AB^T inv. $\Leftrightarrow B$ inv.

b) Onjuist: Neem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $4A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ en $\det(4A^2) = 16 \neq 4(\det A)^2 = 4$.

c) Waar: $\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I^T) = \det(A^T - \lambda I)$ Dus A en A^T hebben hetzelfde karakt. polynoom; dus dezelfde e.w.

5. d) Onjuist: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ is diagonaliseerbaar maar heeft afh. kolommen.

e) Waar: $(A^TA)^T = A^TA^{TT} = A^TA$ dus A^TA is symm. en heeft dus uitsluitend reële e.w. (St.)

f) Waar: als A niet inv. dan $\det A = 0$ en dus is $\lambda = 0$ een opl. van $\det(A - \lambda I) = 0$ dus dan is $\lambda = 0$ een e.w. van A.

g) Onjuist: $\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Row}(A)$ en de rij-ruimte v.e. niet-nul matrix A staat niet orthogonaal op zichzelf.

6. a) $Q^2 = (I-P)(I-P) = I - 2P + P^2 = I - P \Leftrightarrow -2P + P^2 = -P \Leftrightarrow P^2 = P$.

b) Stel $\underline{x} \in \mathrm{Nul}\, Q$ dan $(I-P)\underline{x} = \underline{0}$ dus $I\underline{x} - P\underline{x} = \underline{0}$ of wel $P\underline{x} = \underline{x}$. Daar $P\underline{x} \in \mathrm{Col}(P)$ geldt dan dus $\underline{x} \in \mathrm{Col}\, P$.

c) Stel $\underline{x} \in \mathrm{Col}\, P$ dan $\exists \underline{y}: \underline{x} = P\underline{y}$ dan dus $Q\underline{x} = (I-P)P\underline{y} = P\underline{y} - P^2\underline{y} = P\underline{y} - P\underline{y} = \underline{0}$ dus dan $\underline{x} \in \mathrm{Nul}\, Q$.

d) Uit $Q = I - P$ volgt $P = I - Q$
Men kan Q en P dus gewoon verwisselen en daar $P^2 = P$ en $Q^2 = Q$ ook uitwisselbaar zijn, kan men (analoog aan b) en c)) nu ook bewijzen $\mathrm{Nul}\, P = \mathrm{Nul}\, Q$.