



Faculteit der Exacte Wetenschappen

Vrije Universiteit

10-6-2002

2<sup>e</sup> deeltentamen Lineaire Algebra

voor studenten Wiskunde, Natuurkunde en Econometrie

Duur: 1 $\frac{3}{4}$  uur

Normering:

$$\begin{array}{l} 1a:2 \quad ; \quad 2a:2 \quad ; \quad 3a:3 \quad ; \quad 4:5 \quad ; \quad 5a:2 \quad ; \quad 6:9 \quad ; \\ b:2 \quad ; \quad b:3 \quad ; \quad b:2 \quad ; \quad b:2 \quad ; \\ c:2 \quad ; \quad c:2 \quad . \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$

1. Zij  $B = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -14 \\ 2 & 9 & 14 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Toon aan dat  $\mathbf{v}$  een eigenvector is van  $B$  en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- (b) Toon aan dat 1 een eigenwaarde is van  $B$  en bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- (c) Bepaal een diagonaalmatrix  $D$  en een inverteerbare matrix  $P$  zó dat  $BP = PD$ .

2. Zij  $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 & -8 \\ -2 & 4 & 2 & -6 \\ 3 & -4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Licht toe dat  $\text{rang } A \geq 2$  en dat de dimensie van de nulruimte van  $A$  ook tenminste 2 is.
  - (b) i. Bepaal een basis van de nulruimte van  $A$ .  
ii. Bepaal een basis voor de kolomruimte van  $A$ .
  - (c) Bepaal een basis voor de ruimte van alle vectoren die loodrecht op de nulruimte van  $A$  staan, dat wil zeggen een basis voor  $(\text{Nul } A)^\perp$ .
3. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal een *orthonormale* basis voor  $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
- (b) Bepaal het punt in  $V$  dat de kleinste afstand heeft tot  $\mathbf{y}$ .

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de matrix  $A$  en de vector  $\mathbf{b}$  door  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Bepaal de kleinste kwadraten oplossing van  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

5. Op de vectorruimte  $\mathbb{P}_2$  van de polynomen van de graad ten hoogste 2 (inclusief het 0-polynoom) definiëren we een inwendig product door voor ieder tweetal polynomen  $p(t)$  en  $q(t)$  te nemen

$$\langle p, q \rangle = p(-2)q(-2) + p(0)q(0) + p(2)q(2).$$

Je hoeft niet na te gaan dat dit inderdaad een inwendig product geeft. Zij  $p_1(t) = 1$ ,  $p_2(t) = t$  en  $p_3(t) = t^2$ .

- (a) Toon aan dat  $p_1 \perp p_2$ .
  - (b) Bepaal een orthogonale basis voor  $\mathbb{P}_2$ .
6. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- (a) Er bestaan geen matrices waarvoor  $\text{Row } A \subset \mathbb{R}^3$  en  $\text{Nul } A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1 = x_2 \right\}$ .
  - (b) Als de  $m \times p$  matrix  $U$  orthonormale rijen heeft dan is  $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$  voor iedere vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ .
  - (c) De matrix  $A^T A$  is symmetrisch als en alleen als  $A$  symmetrisch is.
  - (d) Zij  $Q$  een  $m \times p$  matrix met orthonormale kolommen. Dan is  $Q^T Q$  de orthogonale projectie op de kolomruimte van  $Q$ .
  - (e) Er is altijd precies één oplossing voor het kleinste kwadraten probleem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
  - (f) Gelijkvormige matrices hebben dezelfde eigenvectoren.