

a) $B \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -14 \\ 2 & 9 & 14 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus v is e.v. bij de e.w. $\lambda = 0$.

b) $B - 1I = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -14 \\ 2 & 8 & 14 \\ -1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ heeft nulruimte met dimensie 2; dus $\lambda = 1$ is een e.v. en de bijbehorende e.v. heeft basis $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Dit bestaat een basis van e.v. Neem $P = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dus $B = PDP^{-1}$ en dus $BP = PD$.

2. a) de eerste 2 rijen van A zijn niet evenredig, dus onafhankelijk, dus $\text{rang } A \geq 2$.

De nulruimte van $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ heeft dimensie 2 (2 vrije variabelen!) dus $\dim \text{Nul } A \geq 2$.

b) Daar $\text{rang } A + \dim \text{Nul } A = 4$ volgt uit a): $\text{rang } A = 2$ en $\dim \text{Nul } A = 2$.

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ is basis $\text{Nul } A$ (want ook basis van de nulruimte van $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$)

(ii) Neem bijv. de eerste 2 kolommen van A.

c) $\dim (\text{Nul } A)^\perp = 4 - 2 = 2$, dus neem bijv. de eerste 2 rijen van A.

a) Gram-Schmidt: $u_1 = v_1$; $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-8}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-4}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vervolg 3 a):

Dus $\{u_1, u_2, u_3\}$ is een orthogonale basis voor V (controlleren in noot wv)

Nu nog normaliseren; alle 3 vectoren u_1, u_2 en u_3 hebben lengte 2; dus alle 3 delen door 2.

3 b) We zoeken dus persoon $\hat{x} = 14v_1 + \frac{2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{2 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 + \frac{2 \cdot u_3}{u_3 \cdot u_3} u_3 = \frac{2}{4} u_1 + 0 u_2 + \frac{2}{4} u_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Los op: $A^T A \hat{x} = A^T y$ of wel $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ of wel $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$; dus $\hat{x} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$.

5. Het is handig om eerst van de polynomen p_1 en p_2 en p_3 de waarden in $-2, 0$ en $+2$ te berekenen:

p_1	-2	0	$+2$
p_2	1	1	1
p_3	-2	0	$+2$
	4	0	4

a) $\langle p_1, p_2 \rangle = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = -2 + 2 = 0$ dus $p_1 \perp p_2$.

b) Op dezelfde wijze als bij a) ziet men $\langle p_3, p_2 \rangle = -8 + 8 = 0$ dus $p_2 \perp p_3$. Van nu Gram-Schmidt op de basis $\{p_1, p_2, p_3\}$ toe. Dat levert:

$q_1 = p_1$; $q_2 = p_2$; $q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 = p_3 - \frac{0}{3} q_1 = p_3$. De orthogonale basis luidt dus: $\{1, 1 + 2i, 1\}$.

6. a) Waar: Immers als $\text{Row } A \subset \mathbb{R}^3$ dan ook $\text{Nul } A \subset \mathbb{R}^3$

b) Onwaar: Zij $u = (1 \ 0)$ dan u orthonormaal zijn
 Zij nu $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\|\underline{x}\| = 1$ maar $\|u\underline{x}\| = \|\underline{0}\| = 0$.

c) Onwaar: $A^T A$ is 'altijd' symmetrisch; ook voor elke niet-symmetrische, niet-vierkante A .

d) Onwaar: Als Q ortho-normale kolommen heeft dan geldt $Q^T Q = I_p$. Voor elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^p$ geldt dus $Q^T Q \underline{x} = I_p \underline{x} = \underline{x} \in \mathbb{R}^p$.
 Maar kolom-ruimte van Q ligt in $\mathbb{R}^m$
 Dus voor $m \neq p$ is bewering zeker onjuist.

e) Onwaar: Als A geen lin. onafh. kolommen heeft, is $A^T A$ niet inverteerbaar en heeft het kleinste kwadraat probleem ∞ veel oplossingen.

f) Onwaar: Gelijkvormige matrices hebben wel hetzelfde karakt. polynoom en dus dezelfde e.w., maar niet noodz. dezelfde e.v. Zie bijv. som 1:
 B en D zijn gelijkvormig;
 $\underline{v}$ is e.v. van B ; maar duidelijk niet van D : $D \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

