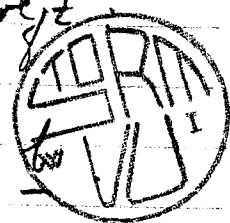


1. a) We berekenen $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = LU \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als volgt

$$U \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 4/3 \end{pmatrix} =$$



b) $\text{Nul } A = \text{Nul } U$; dan we lossen $U \underline{x} = \underline{0}$ op.

Hierbij zijn 2 vrije variabelen: x_2 en x_5 .

Kies $x_2 = 1$ en $x_5 = 0$ en los op: $(-2, 1, 0, 0, 0)$

Kies $x_2 = 0$ en $x_5 = 1$ en los op: $(-1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

Deze 2 vectoren spannen $\text{Nul } U = \text{Nul } A$ op.

c) $A \underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
($x_2, x_5 \in \mathbb{R}$)

a) $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $C^4 = C^2 C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $D(I+E) = (I-E+E^2-E^3)(I+E) =$

$$I - E + E^2 - E^3 + E - E^2 + E^3 - E^4 = I - E^4 = I$$

want $E^4 = 0$, en dan geldt $D^{-1} = I + E$.

Merken nu op: $B = I + C$ met $C^4 = 0$

dan moet dan $B^{-1} = I - C + C^2 - C^3 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ want o.a. } C^3 = C C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{pmatrix}$ (reken maar na!)

Daar $A = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix}$ met $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, geldt $A^{-1} = \begin{pmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 a) \det A(t) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ t-2 & t-2 & -1 \\ t-2 & t-2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 1 & t-2 & t-1 \end{vmatrix} = \\
 &= (t-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t(t-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-2)(t-1) = \\
 &= t^3 - 3t^2 + 2t.
 \end{aligned}$$

$$b) \det A(t) = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{t=0 \vee t=1 \vee t=2}$$

$$c) t=1: \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \infty \text{ veel opl.}$$

dus zeker consistent.

$$d) x_3 = \frac{\begin{vmatrix} t-2 & -1 & 1 \\ t-2 & t-2 & 2 \\ t-2 & t-2 & 1 \end{vmatrix}}{t(t-1)(t-2)} = \frac{-(t-2)(t-1)}{t(t-1)(t-2)} = \boxed{-\frac{1}{t}}$$

↑
epel van Cramer

a) Onwaar: Neem $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alleen de 0-opl. maar $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is inconsistent.

b) Waar: als $A\underline{x} = \underline{0}$ 1 vrije variabele heeft dan heeft elke rij van A (nl. alle 4) een pivot-positie en dus $A\underline{x} = \underline{b}$ consistent voor elke $\underline{b} \in \mathbb{R}^4$.

4. c) Waar: als $AB = BA$ dan
 $(AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

d) Onwaar: stel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $A \neq 0$ maar $A^2 = 0$
en dan $A^2 B = 0$ ook als $B \neq 0$.

e) Waar: als $\{v_1, \dots, v_p\}$ lin. afh. in $\mathbb{R}^n$ dan
zijn er $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ uit $\mathbb{R}$ (niet alle 0) zo dat
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = \underline{0}$ dan $A(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p) =$
 $= \lambda_1 A(v_1) + \dots + \lambda_p A(v_p) = A \underline{0} = \underline{0}$
dan $A(v_1), \dots, A(v_p)$ ook lineair afh.

5. (i) de 0-functie op $\{1, 2, 3\}$ voldoet aan $f(2) = 0$
dan behoort de 0-functie tot W .

(ii) Stel $f, g \in W$ dan $(f+g)(2) = f(2) + g(2) =$
 $= 0 + 0 = 0$ dan $f+g \in W$

(iii) Stel $f \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $(\lambda f)(2) =$
 $\lambda f(2) = \lambda \cdot 0 = 0$ dan $\lambda f \in W$.