

UITWERKING VOORTENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 29-10-2001

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & x-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & x+9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Er zijn 3 pivots als} \\ x \neq -9; \text{ anders 2 pivots} \end{array}$$

Dus de kolommen vormen een onafh. stelsel als $x \neq -9$ en anders een afh. stelsel.

$$b) \text{ Zie a): } A \cdot \underline{x} = \underline{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Kies } x_3 \text{ vrij; dan } x_2 = -3x_3 \\ \text{en } x_1 = -x_2 - x_3 = 2x_3. \end{array}$$

Dus $\underline{x} = (2, -3, 1) \cdot x_3$. De vector $(2, -3, 1)$ vormt een basis voor $N(A)$.

c) Een particuliere oplossing is $(1, -1, 0)$. Alle oplossingen zijn dus van de vorm $\underline{x} = (1, -1, 0) + x_3 \cdot (2, -3, 1), x_3 \in \mathbb{R}$

$$a) \begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 \\ -x & 0 & 1 & -1 \\ -y & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 \\ -x & 0 & 1 & -1 \\ -x-y & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x-y & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (x+y) \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(x+y)(-x-y) = (x+y)^2$$

$$b) x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{(1+1)^2} = \frac{(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(-1) \cdot (1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (B | I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 1 & -3 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -11 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 3 \end{array} \right) \quad \text{dus } B^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

UITWERKING VOORTENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 29-10-2001

4. a) WAAR. $\det A^2 = (\det A)^2$ dus als $A^2 = A$, dan geldt $\det A^2 = (\det A)^2 = \det A$; dus $\det A = 0$ of $\det A = 1$

b) WAAR. $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c) WAAR. Als $Ax = b$ meer dan 1 oplossing heeft, dan zijn er kennelijk vrije variabelen, waar $Ax = 0$ ook meer dan 1 oplossing moet hebben.

d) NIET WAAR. Kies $A = 0$ (de nulmatrix) en $b \neq 0$. Dan heeft $Ax = 0$ meer dan 1 oplossing, maar $Ax = b$ heeft geen oplossingen.

5. a) Er geldt dus voor A dat $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,
dus $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dus $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$
 $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

[Kan ook via: $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ etc.]

b) A is inverteerbaar ($\det A = 3 \neq 0$) dus T heeft een inverse S .
 $B = A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Tentamen Lineaire Algebra : maandag 17-12-2001 13.30-16.30