



1. De matrix A en de vectoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{y}$ worden gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Aan welke relatie moeten b_1 , b_2 en b_3 voldoen, opdat het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent is?
- Bepaal de rang van A en geef een basis voor de nulruimte van A .
- Bereken alle kleinste-kwadraten oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- Bereken de eigenwaarden van A en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimten. Ga vervolgens na of A diagonaliseerbaar is.

2. De matrix B en de vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{c}$ worden gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Bereken $\det(B)$ en $\det(B^T B)$.
- Los x_3 op, met behulp van de regel van Cramer, uit $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$.
- Bereken B^{-1} .

3. De matrix C en de vector $\mathbf{z}$ worden gegeven door

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal, met behulp van het Gram-Schmidt proces, een orthonormale basis voor de kolomruimte van C .
- Bepaal de QR factorisatie van C .
- Bepaal $\hat{\mathbf{z}}$, de orthogonale projectie van $\mathbf{z}$ op de kolomruimte van C .

Z.O.Z.

4. $\mathbb{P}_2$ is de vectorruimte van alle polynomen van de graad kleiner dan of gelijk aan 2, inclusief het nulpolynoom. We definiëren de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ door

$$T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(2) \end{pmatrix}.$$

- a) Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.
 - b) Ga na of T injectief (one-to-one) is.
 - c) Ga na of T surjectief (onto) is.
5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- a) A is een $m \times n$ matrix. Als $n > m$ dan heeft het stelsel $Ax = b$ oplossingen voor alle $b \in \mathbb{R}^m$.
 - b) A, B, C en D zijn 2×2 matrices. Als A, B, C en D inverteerbaar zijn, dan is ook de 4×4 blokmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ inverteerbaar.
 - c) A is een 4×6 matrix. Dan is de dimensie van de nulruimte gelijk aan 2.
 - d) A en B zijn gelijkvormige matrices. Als $A^k = I$ voor een zekere $k \in \mathbb{N}$, dan is ook $B^k = I$.
 - e) Laat $\mathbf{u} = (x, y)$. De kwadratische vorm $Q(\mathbf{u}) = x^2 + xy + y^2$ is positief definit.
 - f) A is een $n \times n$ matrix. Als er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $A^k = I$, dan is A inverteerbaar.
6. a) $M_{2 \times 2}$ is de vectorruimte van alle 2×2 matrices. Met $S_{2 \times 2}$ definiëren we de verzameling van alle symmetrische 2×2 matrices. Laat zien dat $S_{2 \times 2}$ een deelruimte is van $M_{2 \times 2}$.
- b) Laat A een $m \times n$ matrix zijn en laat $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ en $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Gegeven is dat $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Toon aan:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}, \text{ met } \mathbf{c} \in \text{Nul}(A).$$

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : a) 4	4 : a) 2	5 : 11	6 : 6
b) 2	b) 2	b) 3	b) 2		
c) 4	c) 4	c) 2	c) 2		
d) 5					
13	9	9	6	11	6

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{6} + 1$$