

1. De matrix A wordt gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de rang van A en geef een basis voor de rijruimte van A .
- Geef een basis voor de nulruimte van A .
- Bereken de eigenwaarden van A en geef een basis voor elk van de bijbehorende eigenruimtes.
- Is A diagonaliseerbaar? Zo ja, geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D , zó dat $A = PDP^{-1}$.

2. $\mathbb{P}_3$ is de vectorruimte van alle polynomen van de graad kleiner dan of gelijk aan 3, inclusief het nulpolynoom.

- Wat is de dimensie van $\mathbb{P}_3$? Motiveer je antwoord met het aangeven van een basis.
- Laat zien dat het stelsel polynomen

$$\{1 - x + 4x^3, 1 + 2x + x^3, 2 + 10x - 3x^3\}$$

lineair onafhankelijk is in $\mathbb{P}_3$.

We beschouwen verder de verzameling $\mathcal{B}$, gegeven door

$$\mathcal{B} = \{1 - x + 4x^3, 1 + 2x + x^3, 2 + 10x - 3x^3, x^2 + x^3\}$$

- Toon aan dat $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathbb{P}_3$.
- Bepaal $[x^3]_{\mathcal{B}}$, de coördinaatvector van x^3 t.o.v. de basis $\mathcal{B}$.

Z.O.Z.

3. Het vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthonormale basis voor V .
- Bepaal een basis voor $V^\perp$, het orthogonale complement van V .

De vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Bepaal $\hat{\mathbf{y}}$, de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op V .
- Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het stelsel $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{y}$.

4. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- Als A diagonaliseerbaar is, dan is $A + I$ ook diagonaliseerbaar.
- A en B zijn symmetrische 2×2 matrices. Dan is ook AB symmetrisch.
- $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ is een verzameling lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^3$.
Als $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, dan geldt ook $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

5. a) $C[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ is de vectorruimte van alle continue functies op $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. We definiëren voor $f, g \in C[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(t)g(t) \sin t \, dt.$$

Bewijs dat $\langle f, g \rangle$ een inproduct op $C[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ definieert.

- Laat A een reële symmetrische matrix zijn. Als er een inverteerbare matrix W bestaat zó dat $A = W^T W$, dan is de matrix A positief definit. Bewijs dit.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 1	3 : a) 3	4 : 7	5 : 7
b) 2	b) 3	b) 2		
c) 4	c) 3	c) 2		
d) 3	d) 3	d) 2		
-----	-----	-----	-----	-----
12	10	9	7	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$