

$$1. a) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & -15 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I)$$

2 pivots; dus $\text{rang } A = 2$; neem als basis voor $\text{Row}(A)$ bijv. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $\dim \text{Nul}(A) = n - 2 = 3 - 2 = 1$ (d.w.z.: 1 vrije variabele)
Neem als basis voor $\text{Nul}(A)$ bijv. $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Op grond van b) weten we al dat $\lambda = 0$ een e.w. van A met bijbehorende eigenv ruimte $\text{Nul}(A)$. Verder:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & 7-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ -2 & 7-\lambda & \lambda-5 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 5-\lambda & 7-\lambda & \lambda-5 \\ 0 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)^2 (7-\lambda-3-4) = -\lambda(5-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 5 (2x)$$

Eigenruimte bij $\lambda = 5$: Nulruimte van $A - \lambda I$ met $\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Neem bijv. als}$$

basis van deze eigenruimte: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) A is diagonaliseerbaar want er bestaat een basis voor $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van A .

$$\text{Neem bijv. } P = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$