

1. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Ga na of de volgende beweringen waar zijn:

- a) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is een onafhankelijk stelsel;
- b) $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^4$;
- c) de vectorvergelijking $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1$ heeft een unieke oplossing;
- d) de vectorvergelijking $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ heeft een oplossing voor iedere $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

2. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ 5x + 3y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de standaardmatrix behorende bij de afbeelding T .
- b) Is de afbeelding T injectief (one-to-one)?
- c) Is de afbeelding T surjectief (onto)?

3. De matrix A is gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de LU-factorisatie van A .
- b) Geef een verzameling van vectoren die de nulruimte van A opspant.
- c) Bereken de matrix UU^T en $\det UU^T$.
- d) Onderzoek of de matrix AA^T inverteerbaar is.

Z.O.Z.

4. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Laat A, B en C $n \times n$ matrices zijn. Als $A = BC$ en A is inverteerbaar, dan zijn ook B en C inverteerbaar.
- b) Laat A een 3×3 matrix zijn en laat $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$ vectoren uit $\mathbb{R}^3$ zijn. Als $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ een unieke oplossing heeft, dan heeft $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ook een unieke oplossing.
- c) Laat A een 2×2 matrix zijn. Dan geldt $A^T A = A A^T$.
- d) Laat A en B 3×3 matrices zijn. Als $AB = I_3$, dan hebben A en B een pivot-positie in iedere kolom.
- e) Laat A een 3×3 matrix zijn. Als $A^2 = A$, dan is $\det A = 0$ of $\det A = 1$.
- f) Er bestaat géén 2×2 matrix A waarvoor geldt $\text{Nul } A = \text{Col } A$.

5. Bewijs onderstaande uitspraken

- a) Laat A en B $n \times n$ matrices zijn. Als $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ slechts $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als oplossing heeft, dan heeft $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ook alleen de triviale oplossing.
- b) De matrix C wordt gegeven door

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix}.$$

Toon aan dat $\det C = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

- c) Laat V de vectorruimte zijn van alle reële functies op $\mathbb{R}$. Laat W de deelverzameling zijn van V bestaande uit alle differentieerbare functies waarvoor geldt $f'(0) = 0$. Toon aan dat W een deelruimte is van V .

Normering:

1 : 8	2 : a) 2	3 : a) 3	4 : 12	5 : 8
	b) 2	b) 3		
	c) 2	c) 3		
		d) 2		
8	6	11	12	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$

Het tweede deeltentamen D_2 wordt afgenomen op maandag 11 juni 2001.