Uitwerking eerste deeltentamen (D1) Lineaire Algebra 2/4/2001

(I)

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 pivots ; géén vrije variabelen ; dus de kolommen $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ en $\underline{v}_3$ zijn lin. onafh. Dus Waar.

b) Onwaar. Met 3 vectoren kun je nooit heel $\mathbb{R}^4$ opspannen

c) Waar. De vectorvgl $(x-1)\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = \underline{0}$ heeft alleen de triviale opl $x=1, y=0, z=0$ vanwege de onafh. van $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ en $\underline{v}_3$.

d) Waar. Elke $\underline{b} \in \text{Span}\{\dots\}$ is per def. immers een lin. comb van $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ en $\underline{v}_3$.

2. a) Bepaal $T(\underline{e}_1) = T(1,0)$ en $T(\underline{e}_2) = T(0,1)$. DaV geeft de standaard matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) T is 1-1 ; omdat de kolommen in A evident onafh (want niet evenredig zijn)

c) T is niet op ; want de 2 kolommen van A spannen nooit heel $\mathbb{R}^3$ op.

3. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} * \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right| \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} - \\ * \\ -3 \end{matrix} \right| \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$ en $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) De vectoren $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen $\text{Nul}(A)$ op

(II

3. c) $UU^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -12 & 0 \\ -12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Evident : $\det(UU^T) = 0$

d) $AA^T = LU(LU)^T = L(UU^T)L^T$

Daar $\det(L) = \det(L^T) = 1$ volgt

$\det(AA^T) = \det(UU^T) = 0$ dus AA^T <u>niet</u>-inverteerbaar.

4. a) <u>Waar</u> : $\det A = \det(BC) = \det B * \det C$. Als A invert. dan $\det A \neq 0$, dus dan ook $\det B \neq 0$ en $\det C \neq 0$ dus dan ook B en C inverteerbaar

b) <u>Waar</u> : als $A\underline{x} = \underline{b}$ een unieke opl. heeft dan zijn er géén vrije variabelen en dus heeft A een inverse (3x3!) en dus heeft $A\underline{x} = \underline{c}$ voor elke $\underline{c}$ een unieke oplossing.

c) <u>Onwaar</u> : neem bijv $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq A^TA = \begin{pmatrix} 10 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

d) <u>Waar</u> : A en B zijn dan blijkbaar allebei inverteerbaar, dus in elke rij en in elke kolom een pivot (3x3!)

e) <u>Waar</u> : $\det A^2 = (\det A)^2 = \det A$ dus $\det A = 0 \vee 1$

f) <u>Onwaar</u> : Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dan $Nul(A) = Col(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, want o.a. A heeft 1 pivot-kolom (de eerste) en één niet-pivot-kolom en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Nul(A)$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Col(A)$.

5. a) Als $AB\underline{x}=\underline{0}$ alleen de triviale opl. heeft dan is AB inverteerbaar. Maar dan is ook A invert en dan heeft $A\underline{x}=\underline{0}$ óók alleen de triviale oplossing.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c^3-a^3) - (c-a)(b^3-a^3) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c^2+ca+a^2-(b^2+ba+a^2)) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c^2-b^2+ca-ba) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a).$$

c)
- de 0-functie behoort tot W, want de 0-functie is diff. en heeft in 0 afgeleide 0;
- als $f, g \in W$ dan $f+g$ óók diff. en $(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = 0+0=0$, dus dan $f+g \in W$;
- als $f \in W$ dan cf óók diff en $(cf)'(0) = cf'(0) = c \cdot 0 = 0$, dus dan $cf \in W$ (voor elke $c \in \mathbb{R}$).

Dus W is een deelruimte van V.