

1. De deelruimte $V \subset \mathbb{R}^4$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de dimensie van V .
 b) Bepaal een *orthogonale* basis voor V .

- c) Bepaal de orthogonale projectie $\hat{\mathbf{z}}$ van de vector $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ op V .

2. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x - y = -3 \\ x - 3y = k \end{cases},$$

waarin $k \in \mathbb{R}$.

- a) Voor welke k heeft het stelsel oplossingen? Los voor die k het stelsel op.
 b) Stel nu $k = 1$. Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het stelsel.

3. a) Toon aan:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2).$$

- b) De matrix B wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bepaal de eigenwaarden van B en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimten.
 [Aanwijzing: je kunt hierbij onderdeel a) gebruiken.]
 (ii) Verklaar waarom B orthogonaal diagonaliseerbaar is en geef vervolgens een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zo dat $B = QDQ^T$.
 (iii) Is B^2 ook orthogonaal diagonaliseerbaar? Licht je antwoord toe.

Z.O.Z.

4. We beschouwen de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ van polynomen met graad ten hoogste 2, inclusief het nulpolynoom. Gegeven zijn de standaardbasis $\mathcal{E}$ en de verzameling $\mathcal{C}$ door

$$\mathcal{E} = \{1, t, t^2\} \quad \text{en} \quad \mathcal{C} = \{1 - t, t - t^2, 1 + t^2\}.$$

- a) Toon aan dat ook $\mathcal{C}$ een basis is voor $\mathbb{P}_2$.
- b) Bepaal de overgangsmatrix $\begin{matrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E} \end{matrix}$.
5. Gegeven is de kwadratische vorm $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$.
- a) Voer een basistransformatie $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ uit die $Q(\mathbf{x})$ omzet in een kwadratische vorm zonder gemengde producten.
- b) Laat zien dat de kwadratische vorm $Q(\mathbf{x})$ indefiniet is.
6. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- a) A is een 2×2 matrix. Als A inverteerbaar is, dan is A ook diagonaliseerbaar.
- b) A en B zijn 2×2 matrices. Als A en B inverteerbaar zijn, dan is ook de 4×4 blokmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ inverteerbaar.
- c) A en B zijn gelijkvormige matrices. Als $A^2 = O$ dan is ook $B^2 = O$.
- d) Laat A een reële $n \times n$ matrix zijn. Dan $\det(A^T A) \geq 0$.
- e) Een oplossing voor een lineair stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden is altijd te vinden met behulp van de regel van Cramer.
- f) De afbeelding $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $T(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ is een lineaire transformatie.
- g) Laat A een reële 2×2 matrix zijn. Als λ een complexe eigenwaarde is van A , dan is $\bar{\lambda}$ ook een eigenwaarde van A .
- h) Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Als $A^2 = A$ en λ is een eigenwaarde van A , dan geldt $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

7. Bewijs onderstaande uitspraken

- a) Laat $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding zijn. Dan is T injectief (one-to-one) dan en slechts dan als $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ alleen de triviale oplossing heeft.
- b) Laat V een inproductruimte zijn. Als $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ een orthonormale verzameling is in V dan geldt $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.
- c) Laat B een inverteerbare $n \times n$ matrix zijn. Dan is $B^T B$ positief definit.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 3	3 : a) 3	4 : a) 3	5 : a) 4	6 : 16	7 : 9	Eindcijfer =
b) 2	b) 4	b) 8	b) 4	b) 2			# punten
c) 3							<u>7</u> + 1
7	7	11	7	6	16	9	

$$1. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de rang van deze matrix is 2 en dus ook $\dim V = 2$

b) Neem $\{v_1, v_2\}$ als basis voor V en neem dan
 $u_1 = v_1$ en $u_2 = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 dan is $\{u_1, u_2\}$ een orthog. basis voor V .

$$c) \hat{z} = \frac{z \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{z \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{0}{4} u_1 + \frac{2}{2} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. a) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & k \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -15 \\ 0 & -1 & k-6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & k-11 \end{array} \right)$$

Alleen consistent stelsel als $k=11$. Als $k=11$
 dan is $x=-4, y=-5$ de enige oplossing.

b) Zij $k=1$ dan luidt het stelsel $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

De (unieke!) kleinste kwadratenopl. van dit inconsist. stelsel wordt nu gevonden uit:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -70 \\ -65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -13/7 \end{pmatrix}.$$

$$3. a) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ 1 & x & x+2 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = (x+2)(x-1)^2.$$

$$b) (i) \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{zie a)}}{=} (5-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

Vervolg 3. b) (i)

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (5 - \lambda)(2 - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \vee \lambda = 2 \text{ (2x)}$$

Op zoek naar eigenvectoren:

$$\underline{\lambda = 5}: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ geeft e.v. } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 2}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ geeft basis van e.v. } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) B is orthog. diag. omdat B symmetrisch is.

Zoek nu een orthonormale basis van e.v.

Eerst bij $\lambda = 2$ een orthog. basis:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dan bij v } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nu normaliseren:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wen: } Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ en } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(door andere volgorde zijn hier allerlei variaties mogelijk)

(iii) Daar $B = Q D Q^T$ (en $Q^T = Q^{-1}$) volgt

$$B^2 = Q D Q^T Q D Q^T = Q D^2 Q^T \text{ met } D^2 \text{ weer een diagonaal-matrix.}$$

(Men kan ook zeggen: B^2 heeft ook een ortho.-normale basis van e.v., nl. dezelfde als voor B .)

(Men kan ook zeggen: daar B symm. is, is B^2 ook symm. en dan is B^2 ook orthog. diag.)

4. a) Bekijk de coörd. vectoren (in $\mathbb{R}^3$) v/d 3 vectoren in $\mathcal{C}$ t.o.v. $\mathcal{B}$. Die zijn onafh. want

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \text{ dan ook de 3 vectoren in } \mathcal{C} \text{ zijn lin. onafh. en dan een basis } (\# = 3)$$

4. b) de gevraagde overgangsmatrix is de inverse v/d matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{De begalen die op de bekende manier:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\text{Dan } P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(Men kan ook proberen (op goed geluk) de vectoren uit $\mathcal{E}$ uit te drukken in de vectoren uit $\mathcal{Q}$.)

5. a) $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

A is symm. en heeft e.w. $1+5=6$ en $1-5=-4$ met bijbehorende (orthog.) e.v. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Neem nu $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ en $\underline{x} = P \underline{y}$ dan

$$Q(\underline{x}) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 = \underline{x}^T A \underline{x} = (P \underline{y})^T A (P \underline{y}) =$$

$$= \underline{y}^T P^T A P \underline{y} = \underline{y}^T D \underline{y} = 6y_1^2 - 4y_2^2,$$

$$\text{want } P^T = P^{-1} \text{ en } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) A heeft een pos en een neg e.w.

$$\text{(Ook mag: } Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0 \text{ en } Q \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 10 + 1 = -8 < 0)$$

6. a) Onwaar: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is inv. maar niet diag.

b) Waar: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = I_4$

c) Waar: $B = P A P^{-1}$ dan $B^2 = P A P^{-1} P A P^{-1} = P A^2 P^{-1} = P O P^{-1} = O$

d) Waar: $\det(A^T A) = \det A^T * \det A = \det A * \det A = (\det A)^2 \geq 0$.

e) Onwaar: het kan alleen als de det. v/d coëff. matrix $\neq 0$ is; en dat is uiteraard niet altijd het geval.

f) Onwaar: $T(e_1) = \|e_1\| = 1$ maar $T(-e_1) = \|-e_1\| = \|e_1\| = 1$
(en daar zou dan -1 uit moeten komen)

g) Waar: stel $A \underline{x} = \lambda \underline{x}$ met $\underline{x} \neq \underline{0}$ dan
 $\overline{A \underline{x}} = \overline{\lambda \underline{x}} = A \overline{\underline{x}}$ (want A reëel)

$$\frac{\|}{\lambda \underline{x}} = \overline{\lambda} \overline{\underline{x}} \quad \text{dus} \quad A \overline{\underline{x}} = \overline{\lambda} \overline{\underline{x}} \quad \text{met} \quad \overline{\underline{x}} \neq \underline{0}$$

h) Waar: stel $A \underline{x} = \lambda \underline{x}$ met $\underline{x} \neq \underline{0}$ dan

$$A^2 \underline{x} = A(A \underline{x}) = A \lambda \underline{x} = \lambda A \underline{x} = \lambda^2 \underline{x}$$

$$\frac{\|}{A \underline{x}} = \lambda \underline{x} \quad \text{dan} \quad (\underline{x} \neq \underline{0} !!) \quad \lambda^2 = \lambda \quad \text{dan} \quad \underline{\lambda = 0 \vee \lambda = 1}$$

7. a) (i) stel T 1-1 en stel $T(\underline{x}) = \underline{0}$. Maar ook $T(\underline{0}) = \underline{0}$ volgt nu $\underline{x} = \underline{0}$

(ii) stel $T(\underline{x}) = T(\underline{y})$ dan $T(\underline{x} - \underline{y}) = T(\underline{x}) - T(\underline{y}) = \underline{0}$
as $T(\underline{x}) = \underline{0}$ alleen de triviale op l. heeft volgt nu
 $\underline{x} - \underline{y} = \underline{0}$ of wel $\underline{x} = \underline{y}$ dus T is 1-1.

b) $\|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = \langle \underline{u} - \underline{v}, \underline{u} - \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\|^2 - 0 - 0 + \|\underline{v}\|^2 = 1 + 1 = 2$

c) (i) $B^T B$ is symm want $(B^T B)^T = B^T B^{TT} = B^T B$

(ii) $\underline{x}^T B^T B \underline{x} = (B \underline{x})^T B \underline{x} = \|B \underline{x}\|^2 \geq 0$ en $\|B \underline{x}\|^2 = 0 \Leftrightarrow B \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ want B is inverteerbaar.