

1. De matrix A is gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de rang van de matrix A .
- Bepaal de dimensie van en geef een basis voor de nulruimte van A .
- Geef twee lineair onafhankelijke vectoren uit $(\text{Nul } A)^\perp$, het orthogonale complement van de nulruimte van A .

2. De matrix B en de vector $\mathbf{v}$ zijn gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van B en geef de bijbehorende eigenwaarde.
- Laat zien dat 4 een eigenwaarde is van B en bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- Licht toe dat B diagonaliseerbaar is en geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat $B = PDP^{-1}$.

3. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

en de lineaire deelruimte $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

- Toon aan dat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een basis is voor V .
- Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor V .
- Bepaal de projectie $\hat{\mathbf{y}}$ van $\mathbf{y}$ op V .

Z.O.Z.

4. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 6y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Er bestaan matrices A waarvoor geldt $\text{Col } A = \mathbb{R}^3$ en $\text{Nul } A = \mathbb{R}^2$.
- b) Als matrix A gelijkvormig is met matrix B , dan is A^2 gelijkvormig met B^2 .
- c) Laat U een 2×2 matrix zijn met orthogonale kolommen.
Dan geldt voor iedere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ dat $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.
- d) De kwadratische vorm $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$ is positief definitief.

6. Bewijs onderstaande uitspraken

- a) Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Als λ_1 en λ_2 verschillende eigenwaarden van A zijn met bijbehorende eigenvectoren $\mathbf{x}_1$ resp. $\mathbf{x}_2$, dan is $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ een verzameling onafhankelijke vectoren.
- b) Laat A een *symmetrische* $n \times n$ matrix zijn. Als λ_1 en λ_2 verschillende eigenwaarden van A zijn met bijbehorende eigenvectoren $\mathbf{x}_1$ resp. $\mathbf{x}_2$, dan staat $\mathbf{x}_1$ loodrecht op $\mathbf{x}_2$.
- c) Laat A en B $n \times n$ matrices zijn. Als A gelijkvormig is met B , dan hebben A en B dezelfde verzameling eigenwaarden.

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 2	3 : a) 2	4 : 5	5 : 8	6 : 9
b) 3	b) 3	b) 3			
c) 2	c) 3	c) 3			
7	8	8	5	8	9

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$