Uitwerking 2e deeltentamen Lineaire Algebra (D2) 30/5/00

1. a) $$A=\begin{pmatrix}1&0&1&1&3\\2&-1&1&3&5\\1&1&2&0&4\\0&2&2&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&3\\0&-1&-1&1&-1\\0&1&1&-1&1\\0&2&2&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&3\\0&-1&-1&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2 pivots, dus rang $A = \underline{\underline{2}}$.

b) $\dim \mathrm{Nul}(A) = n - r = 5 - 2 = 3$. Basis voor $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ (Men kiest elk v/d vrije variabelen een keer gelijk aan 1, en de overige 0)

c) Elke rij uit A staat $\perp$ elke vector uit $\mathrm{Nul}(A)$.
Men neme dus bijv. de eerste 2 rijen uit A.

2. a) $$B\underline{v}=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&3&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$ dus

$\underline{v}$ is eigenvector bij de eigenwaarde 0.

b) $$B-4\underline{I}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$ heeft rang 1 dus 4 is e.w. van B en bijbehorende eigenruimte heeft basis $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

c) B is diagonaliseerbaar want er is een basis van eigenvectoren. Men neme bijv. $P=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ en $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

3. a) $$\begin{pmatrix}1&-2&4&0\\0&2&1&1\\1&0&5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&4&0\\0&2&1&1\\0&2&1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&4&0\\0&2&1&1\\0&0&0&6\end{pmatrix},$$

3 pivots, dus rang 3 dus lin. onafh. rijen
De 3 opspannende vectoren zijn dus onafh., dus basis.

b) Gelukkig geldt al $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ dus we hoeven alleen wat aan $\underline{v}_3$ te doen:

$$\underline{u}_3=\underline{v}_3-\frac{\underline{v}_3\cdot\underline{v}_1}{\underline{v}_1\cdot\underline{v}_1}\underline{v}_1-\frac{\underline{v}_3\cdot\underline{v}_2}{\underline{v}_2\cdot\underline{v}_2}\underline{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\7\end{pmatrix}-\frac{21}{21}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\0\end{pmatrix}-\frac{12}{6}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}$$ (even controleren; **O.K.**)

c) $$\hat{\underline{y}}=\frac{\underline{y}\cdot\underline{v}_1}{\underline{v}_1\cdot\underline{v}_1}\underline{v}_1+\frac{\underline{y}\cdot\underline{v}_2}{\underline{v}_2\cdot\underline{v}_2}\underline{v}_2+\frac{\underline{y}\cdot\underline{u}_3}{\underline{u}_3\cdot\underline{u}_3}\underline{u}_3=\frac{21}{21}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\0\end{pmatrix}+\frac{6}{6}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{30}{30}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\6\end{pmatrix}.$$

II

4. Zij $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan eigenwaarden van A zijn 0 en 5. Eigenvectoren:

$\underline{\lambda = 0}$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 5}$: $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e.v. bij $\lambda = 5$.

De algemene oplossing is dus:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} -3c_1 + 2c_2 e^{5t} \\ c_1 + c_2 e^{5t} \end{pmatrix}$$

5. a) Onwaar: als A is $m \times n$ en $\mathrm{Col}\, A = \mathbb{R}^3$ dan $m = 3$ en $\mathrm{Nul}\, A = \mathbb{R}^2$ dan $n = 2$. Echter: een 3×2 matrix kan nooit hogere rang dan 2 hebben.

b) Waar: als $A = PBP^{-1}$ dan $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1}$

c) Onwaar: Neem bijv. $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan U orthog. kolommen; $\|\underline{x}\| = 1$ en $\|U\underline{x}\| = 2$.

d) Onwaar: $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A < 0$ dus A heeft een pos. en een neg. e.w.

6. a) Stel $c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2 = \underline{0}$ (*) dan $A(c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2) =$
$= c_1A\underline{x}_1 + c_2A\underline{x}_2 = \lambda_1c_1\underline{x}_1 + \lambda_2c_2\underline{x}_2 = A\underline{0} = \underline{0}$

Uit (*) volgt $\lambda_1c_1\underline{x}_1 + \lambda_1c_2\underline{x}_2 = \underline{0}$

dus (aftrekken!) $(\lambda_2 - \lambda_1)c_2\underline{x}_2 = \underline{0}$ Daar $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ en $\underline{x}_2 \neq \underline{0}$ volgt $c_2 = 0$ en dus $c_1 = 0$

b) $\lambda_1(\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2) = (\lambda_1\underline{x}_1) \cdot \underline{x}_2 = (A\underline{x}_1) \cdot \underline{x}_2 = (A\underline{x}_1)^T\underline{x}_2 =$
$= \underline{x}_1^T A^T \underline{x}_2 = \underline{x}_1^T A \underline{x}_2 = \underline{x}_1^T(\lambda_2\underline{x}_2) = \underline{x}_1 \cdot (\lambda_2\underline{x}_2) = \lambda_2(\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2)$

Dus (daar $\lambda_1 \neq \lambda_2$) moet wel gelden: $\underline{x}_1 \cdot \underline{x}_2 = 0$.

c) Stel $A = PBP^{-1}$ en $\underline{x} \neq \underline{0}$ is e.v. van B bij de e.w. λ. Dan $B\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Zij nu $\underline{y} = P\underline{x}$ dan ook $\underline{y} \neq \underline{0}$ (want P inv.) en $A\underline{y} = PBP^{-1}\underline{y} =$
$= PBP^{-1}P\underline{x} = PB\underline{x} = P\lambda\underline{x} = \lambda P\underline{x} = \lambda\underline{y}$ dus $\underline{y}$ is e.v. van A bij dezelfde e.w. λ. Omgekeerd gaat net zo.

(Men kan ook laten zien dat A en B zelfde karakt. polynoom hebben)