

1. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

De enige eigenwaarden van A zijn 0 en 4. Bepaal een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$ bestaande uit eigenvectoren van A .

2. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal de kleinste kwadraten oplossing $\hat{x}$ van de vergelijking $Ax = b$.
- (b) Bepaal de loodrechte projectie van b op de kolomruimte van A .

3. Zij

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 13 & 4 \end{bmatrix},$$

Bepaal getallen a en b en een inverteerbare matrix S zó dat

$$A = S \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} S^{-1}.$$

4. Zij $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dan heet N normaal als $NN^* = N^*N$.

- (a) Zij N normaal en $\lambda \in \mathbb{C}$. Bewijs dat λN normaal is.
- (b) Zij $\lambda \in \mathbb{C}$ en zij voor een Hermitische $n \times n$ matrix $N \neq 0$ ook λN Hermitisch. Toon aan dat λ reëel is.
- (c) Zij $N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ normaal. Bewijs dat N symmetrisch is, of van de vorm

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

is met $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Z.O.Z.

5. De vectoren v_1 en v_2 in $\mathbb{R}^n$ zijn orthogonaal en ongelijk aan de nulvector. Zij

$$C_i = I - \frac{2}{v_i^T v_i} (v_i v_i^T) \quad (i = 1, 2), \quad C_{12} = I - \frac{2}{v_1^T v_1} (v_1 v_1^T) - \frac{2}{v_2^T v_2} (v_2 v_2^T).$$

(a) Bewijs dat C_1 en C_2 orthogonale en symmetrische matrices zijn.

(b) Bewijs dat C_{12} een orthogonale matrix is.

Hint: toon aan dat $C_{12} = C_1 C_2$.

6. Zij $\mathbf{P}_2$ de vectorruimte van de reële polynomen van de graad ten hoogste 2 in de variabele x . Zij $\mathcal{B}$ de standaardbasis $\{1, x, x^2\}$ van $\mathbf{P}_2$. Zij $T : \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$ de lineaire afbeelding met

$$T(1) = 3 + 2x + x^2, \quad T(x) = 2, \quad T(x^2) = 2x^2.$$

Bepaal $T^4(x + 2)$.

Normering:

$$\begin{array}{llllll} 1 : 7, & 2a : 3, & 3 : 5, & 4a : 2, & 5a : 3, & 6 : 6, \\ & b : 3, & & b : 2, & b : 3, & \\ & & & c : 2. & & \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$