

1. De matrix  $A$  en de vector  $\mathbf{b}$  zijn gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de  $LU$ -factorisatie van de matrix  $A$ .
- b) Bepaal een verzameling vectoren die de nulruimte van  $A$  opspant.
- c) (i) Toon aan dat  $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0)$  een oplossing is van de vergelijking  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .  
(ii) Geef vervolgens *alle* oplossingen van  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

2. De matrix  $B$  is gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de inverse van  $B$ .

3. a) Toon aan dat voor willekeurige  $x, y$  en  $z$  geldt:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & 1 & -1 \\ -y & -1 & 0 & 1 \\ -z & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (x + y + z)^2.$$

b) Los  $x_3$  op met behulp van de regel van Cramer:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[Aanwijzing: je kunt onderdeel a) gebruiken.]

**Z.O.Z.**

4. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Laat  $A$  een  $3 \times 2$  matrix zijn. Als het stelsel  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  precies één oplossing heeft, dan heeft het stelsel  $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$  ook precies één oplossing.
- b) Laat  $A$  een  $m \times n$  matrix zijn. Als de vergelijking  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  consistent is voor alle  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , dan heeft  $A$  een pivot positie in iedere kolom.
- c) Als de matrix  $A$  inverteerbaar is, dan is de matrix  $A^2$  ook inverteerbaar.
- d) Als  $A$  een inverteerbare  $n \times n$  matrix is, dan heeft de vergelijking  $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  een unieke oplossing voor elke  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

In onderstaande beweringen is  $T$  een lineaire afbeelding  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- e) Als  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  een lineair afhankelijke verzameling in  $\mathbb{R}^n$  is, dan is  $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$  ook een lineair afhankelijke verzameling in  $\mathbb{R}^n$ .
- f) Als  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  een lineair onafhankelijke verzameling in  $\mathbb{R}^n$  is, dan is  $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$  ook een lineair onafhankelijke verzameling in  $\mathbb{R}^n$ .

5. Bewijs onderstaande uitspraken

- a) Laat  $A$  en  $B$   $n \times n$  matrices zijn.  
Als  $AB$  inverteerbaar is, dan is ook  $B$  inverteerbaar.
- b) Laat  $A$  en  $B$   $n \times n$  matrices zijn. Dan geldt  $\det AB^T = \det A^T B$ .
- c)  $V$  is de verzameling van alle vectoren  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  waarvoor  $x_2 = x_3 = 0$ .  
Dan is  $V$  een deelruimte van  $\mathbb{R}^4$ .

### Normering:

|          |       |          |        |       |
|----------|-------|----------|--------|-------|
| 1 : a) 4 | 2 : 6 | 3 : a) 5 | 4 : 14 | 5 : 7 |
| b) 3     |       | b) 4     |        |       |
| c) 2     |       |          |        |       |
| <hr/>    | <hr/> | <hr/>    | <hr/>  | <hr/> |
| 9        | 6     | 9        | 14     | 7     |

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$