I

Uitwerking 1e deeltentamen (D1) Lineaire Algebra 23 - 3 - 2000

1. a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & * \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & - \\ 0 & 5 & 1 & 0 & * \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dus $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU.$

b) $A\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow U\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = x_3\begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(er zijn 2 vrije variabelen)

dus bijv. $\left\{\begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ spant Nul(A) op.

c) (i) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{b}$.

(ii) $A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \end{array}\right)$. Dus $\begin{pmatrix} 11 & 8 & -6 \\ 9 & 7 & -5 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ is gevraagde inverse.

3. a) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & 2 \\ -x & 0 & 1 & -1 \\ -y & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{4e optellen}}{\overset{\text{2e en 3e kolom bij}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & x & y & x+y+2 \\ -x & 0 & 1 & 0 \\ -y & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ontwikkelen naar 4e kolom

$= -(x+y+2)\begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ -y & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(x+y+2)\left(-x\cdot 1 + (-y-2)\right) = (x+y+2)^2.$

3.b) $$x_3 = \frac{\det A_3(\underline{b})}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{(1+1+0)^2} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1(-1-1)}{4} = \underline{\underline{1/2}} .$$

4. a) <u>onwaar</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft precies 1 opl

maar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ geen enkele opl.

b) <u>onwaar</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{b}$ is consistent voor elke $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$. Toch heeft niet iedere kolom een pivot-positie

c) <u>waar</u>: A^2 is nl. het produkt van 2 inv. matrices.

d) <u>waar</u>: de unieke oplossing is: $\underline{x} = A\underline{b}$

e) <u>waar</u>: $\exists c_1, c_2, c_3$ (niet alle 0): $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3 = \underline{0}$

dan $T(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3) = c_1T\underline{v}_1 + c_2T\underline{v}_2 + c_3T\underline{v}_3 =$

$T(\underline{0}) = \underline{0}$ dus ook $T\underline{v}_1, T\underline{v}_2, T\underline{v}_3$ afh.

f) <u>onwaar</u>: Neem $\underline{v}_i = \underline{e}_i$ in $\mathbb{R}^3$ en $T\underline{x} = \underline{0}$

dan $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ onafh en $\{\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}\}$ afh.

5. a) $\exists W: W(AB) = I_n = (WA)B$ dus B heeft inverse WA (alles vierkant!)

b) $\det(AB^T) = \det A * \det B^T = \det A^T * \det B$
$= \det(A^TB)$.

c) $V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dus een lin. deelruimte van $\mathbb{R}^4$.