Beknopte uitwerking van het tentamen Lineaire Algebra II a d.d. 16-08-1999

---

1 (a) $Av = -3v$

(b) $Av = v \Leftrightarrow v \in \{\lambda(0,0,1,0) + \mu(1,0,0,2) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

(c) $\det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 3 = (\lambda-1)^3(\lambda+3)$.

$\lambda = 1$ heeft dus multipliciteit 3 en $\lambda = -3$ heeft multipliciteit 1.

(d) De eigenruimte bij 1 is 2-dimensionaal (zie (b)) en 1 heeft multipliciteit 3. Dus niet diagonaliseerbaar.

2(a) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$. Dus eigenwaarde -2 met eigenvector $(2,3)$ en 1 met eigenvector $(1,2)$.

Dan $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ zijn zoals gevraagd.

(b) $x(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Nevenvoorwaarde levert $2c_1 + c_2 = 1$ en $3c_1 + 2c_2 = 1$. Dus $c_1 = 1$ en $c_2 = -1$. Dus $x_1(t) = 2e^{-2t} - e^t$ en $x_2(t) = 3e^{-2t} - 2e^t$.

3(a) De kolomruimte is 2-dimensionaal. De eerste en de derde kolom zijn onafhankelijk. Zij $v_1 = (2,2,1,0)$ en $v_2 = (3,2,-1,-2)$.

Dan $v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (3,2,-1,-2) - \frac{9}{9}(2,2,1,0) = (1,0,-2,-2)$.

Dus $\{\frac{1}{3}(2,2,1,0), \frac{1}{3}(1,0,-2,-2)\}$ is de gevraagde basis.

(b) We bepalen de orthogonale projectie van b op de kolomruimte.

$\langle b, \frac{1}{3}(2,2,1,0) \rangle = 5$ en $\langle b, \frac{1}{3}(1,0,-2,-2) \rangle = -5$.

De projectie is dus $\frac{5}{3}(2,2,1,0) - \frac{5}{3}(1,0,-2,-2) = \frac{5}{3}(1,2,3,2) = b'$.

Oplossen van $Ax = b' \Rightarrow x = (0, 5/3, 0)$.

---

4 $t^2 + 2t + 1 = (t^2 + t + 1) + (t+1) - 1$. De coördinaten van $p(t)$ t.o.v. $\mathcal{B}$ zijn dus $(-1,1,1)$. De coördinaten van Tp t.o.v. $\mathcal{B}$ zijn dus

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

. Dus $Tp(t) = 4 - (t+1) + 3(t^2 + t + 1)$
$= 3t^2 + 2t + 6$

Conclusie: $a = 3$, $b = 2$, $c = 6$.