

1. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dan $\det A = 0$ (niet narekenen!).

- (a) Toon aan dat v een eigenvector van A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- (b) Toon aan dat -1 een eigenwaarde is van A . Bepaal een **orthogonale** basis voor de bijbehorende driedimensionale eigenruimte.
- (c) Bepaal de eigenwaarden van A met hun (algebraïsche) multipliciteiten.

2. Zij

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- (a) Bepaal een inverteerbare matrix S en getallen a en b zó dat

$$A = S \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} S^{-1}$$

- (b) Bepaal A^{19} .

3. Zij $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2$.

- (a) Bepaal een symmetrische matrix A zó dat $Q(x_1, x_2) = x^T A x$, met $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
- (b) Ga na of $Q(x_1, x_2)$ positief definit is.

Z.O.Z.

4. Bewijs of weerleg de volgende beweringen. (Je mag voor het bewijs je beroepen op stellingen (Theorems) uit het boek.)

- (a) Als twee 2×2 matrices hetzelfde karakteristieke polynoom hebben, dan zijn ze gelijkvormig (=similar in engels).
- (b) Als de matrix A diagonaliseerbaar is, dan is A gelijkvormig met zijn gespiegelde A^T .
- (c) Als de matrix A symmetrisch is, dan is A diagonaliseerbaar.
- (d) Als iedere eigenruimte van de matrix A een orthonormale basis heeft, dan is A symmetrisch.
- (e) Als de $n \times n$ matrix A precies n verschillende eigenwaarden heeft, dan heeft A precies n verschillende eigenvectoren.

5. Zij

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3], \quad A = QR.$$

- (a) Bepaal een orthogonale basis voor de kolomruimte van A zonder de matrix A expliciet uit te rekenen.
- (b) Bereken de projectie van b op de kolomruimte van A .
- (c) Bepaal een kleinste-kwadraten-oplossing van $Ax = b$.

Normering:

1 a:	2;	2 a:	4;	3 a:	2;	4 a:	2;	5 a:	2.
b:	6	b:	2	b:	2	b:	2	b:	2
c:	2					c:	2	c:	2
						d:	2		
						e:	2		

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$