Beknopte uitwerking van de toets/het tentamen Lineaire Algebra II a d.d. 19-04-1999

1 (a) $Av = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1v$. Dus v is eigenvector en 1 is de bijbehorende eigenwaarde.

(b) $A-(-1)I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$

$[A-(-1)I]\,x = 0$ geeft vrije variabelen x_3, x_4, x_5; $x_2 = x_3 - x_4 - x_5$, $x_1 = -x_3 - x_4 - 2x_5$. Dan $x = x_3 v_1 + x_4 v_2 + x_5 v_3$

met $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Gram Schmidt $b_1 = v_1$; $b_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 = v_2 - 0 b_1 = v_2$;

$b_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 - \frac{v_3 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} b_2 = v_3 - \frac{1}{3} b_1 - \frac{3}{3} b_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

De gevraagde basis is $\{b_1, b_2, b_3\}$

(c) $\left.\begin{array}{l} \text{Eigenwaarde } 1 \text{ heeft algebraische multipliciteit} \geq 1 \\ \quad \text{"} \quad -1 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \geq 3 \\ \quad \text{"} \quad 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \geq 1 \end{array}\right\}$ Samen 5 dus: 1 met mult. 1; -1 " " 3; 0 met mult 1.

[$\det A = 0$, dus 0 is een eigenwaarde (Inverse-Matrix-Stelling)]

2 (a) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$ Dus $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}i = a \pm bi$

Kies $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $b = \frac{1}{2}$. Dan eigenvector bij $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$. Dus $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$

Kies $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $A = SDS^{-1}$ en $D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ is draaiing over 30°.

(b) $A^{19} = S D^{19} S^{-1}$. D^{19} is draaiing over $570° = 360° + 180° + 30°$. Dus $D^{19} = -D$

Daarom $A^{19} = S D^{19} S^{-1} = S\,{-D}\,S^{-1} = -A$. Dus $A^{19} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

3 (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ (b) Eigenwaarden van A: 0 en 15. Niet beide positief dus A is niet positief definiet.

4 (a) Fout $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $|A - \lambda I| = |B - \lambda I| = \lambda^2$ en $SAS^{-1} = A$ wat S ook is.

(b) $A = SDS^{-1}$. Dan $A^T = (S^T)^{-1} D^T S^T = T D T^{-1}$ met $T = (S^T)^{-1}$. (Immers $D = D^T$)

Dus A gelijkvormig met D en D gelijkvormig met A^T. Dus A en A^T gelijkvormig. Goed dus

(c) Ja, stelling

(d) (Iedere ruimte heeft orthonormale basis!) Fout. Vb.: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Eigenruimte bij 0: span$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

(e) Fout, bij een eigenwaarde zijn oneindig veel eigenvectoren

5 (a) Bedenk $a_1 = q_1$, $a_2 = q_1 + q_2$, $a_3 = q_1 - q_2$. Dus Col A = Span $\{q_1, q_2\}$, $q_1 \perp q_2$. Dus $\{q_1, q_2\}$ orthog. basis

(b) $\hat{b} = \frac{b \cdot q_1}{q_1 \cdot q_1} q_1 + \frac{b \cdot q_2}{q_2 \cdot q_2} q_2 = q_1 + q_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$

(c) De kleinste kwadraten oplossing is de oplossing van $Ax = \hat{b}$. Neem $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dan $QRx = Q\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = q_1 + q_2 = \hat{b}$.

[Immers $\hat{b} = a_2$!]

Wiskunde en Informatica
Vrije Universiteit

Tentamen
Lineaire Algebra IIa

voor studenten Econometrie

Duur: $1\frac{1}{2}$ uur

16-08-1999

1. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 7 & 1 & -8 \\ 24 & 12 & 0 & -11 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Toon aan dat v een eigenvector van A is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
   (b) Toon aan dat 1 een eigenwaarde is van A. Bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
   (c) Bepaal de eigenwaarden van A met hun (algebraïsche) multipliciteiten.
   (d) Is A wel of niet diagonaliseerbaar?

2. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -18 & 10 \end{bmatrix}$, en het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -11x_1(t) + 6x_2(t), \\ x_2'(t) &= -18x_1(t) + 10x_2(t), \\ x_1(0) &= 1, \\ x_2(0) &= 1. \end{cases}$$

   (a) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zó dat $A = PDP^{-1}$.
   (b) Bepaal de oplossing $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen.

3. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bepaal een orthonormale basis voor de kolomruimte van A.
   (b) Bepaal een kleinste-kwadraten-oplossing van $Ax = b$.

Z.O.Z.

4. Zij $\mathbf{P}_2$ de vectorruimte van de polynomen van de graad ten hoogste twee met reële coëfficienten. Zij $\mathcal{B} = \{1, t+1, t^2+t+1\} \subset \mathbf{P}_2$. Dan is $\mathcal{B}$ een basis van $\mathbf{P}_2$. Zij $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ de lineaire transformatie waarvan de matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ ten opzichte van $\mathcal{B}$ gegeven is door

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zij $p(t) = t^2+2t+1$. Het beeld van $p(t)$ onder T schrijven we als $(Tp)(t) = at^2+bt+c$. Bepaal de getallen a, b, en c.

Normering:

1 a:	2;	2 a:	3;	3 a:	4;	4:	4.
b:	4	b:	3	b:	4		
c:	2						
d:	1						

Eindcijfer $= 1 + \frac{\text{totaal}}{3}$.