

1. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 8 \\ 8 & 11 & 12 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bereken de matrix X uit de vergelijking $AX = B$.

2. Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Dan is $\det A = -12$. (Niet narekenen!)

(a) Bereken x_3 met de regel van Cramer uit $Ax = b$.

(b) Zij $A^{-1} = [c_{ij}]_{i=1,j=1}^{4,4}$. Bereken c_{32} .

3. Bewijs of weerleg de volgende beweringen. (Je mag voor het bewijs je beroepen op stellingen (Theorems) uit het boek.)

(a) Van de $n \times n$ matrix is gegeven dat de kolommen een afhankelijk stelsel vormen. Dan vormen ook de rijen een afhankelijk stelsel.

(b) Als voor de vierkante matrix de vergelijking $Ax = 0$ een oplossing ongelijk aan de nuloplossing heeft, dan is A^T inverteerbaar.

(c) De vectoren $a_1, \dots, a_n$ zijn de kolommen van de vierkante matrix A . Als voor $k = 1, \dots, n$ de vergelijking $Ax = a_k$ een oplossing heeft, dan is de matrix A inverteerbaar.

(d) Als voor de $n \times m$ matrix A er een matrix C bestaat zó dat $CA = I$, dan is $Ax = b$ oplosbaar voor iedere $b \in \mathbb{R}^n$.

(e) Als voor de $n \times m$ matrix A er een matrix C bestaat zó dat $CA = I$, dan is $A^T x = b$ oplosbaar voor iedere $b \in \mathbb{R}^m$.

Z.O.Z.

4. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De transformatie $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ wordt gegeven door $T(x) = Ax$ en de transformatie $S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ door

$$S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Zij $U = S \circ T$ en $V = T \circ S$. Bepaal de standaardmatrices van U en V .

5. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -5 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Dan is } A = LU. \text{ (Niet narekenen!)}$$

(a) Geef voor de kolomruimte van A een basis $\mathcal{B}$ die geheel bestaat uit kolommen van A .

De eerste drie kolommen van L vormen een basis, zeg $\mathcal{C} = \{l_1, l_2, l_3\}$, voor de kolomruimte van A . (Hoeft u niet te bewijzen)

(b) Van de vector b in de kolomruimte van A is gegeven dat de coördinaatvector ten opzichte van $\mathcal{B}$ gegeven wordt door

$$[b]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bepaal b als vector in $\mathbb{R}^5$ en de coördinaten van b ten opzichte van $\mathcal{C}$.

(c) Bepaal matrix $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ die de overgang van de coördinaatvector ten opzichte van $\mathcal{C}$ naar de coördinaatvector ten opzichte van $\mathcal{B}$ geeft.

Normering: 1 : 4, 2 : 5, 3 : 7, 4 : 4, 5 : 7. Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{3}$.