Beknopte uitwerking van het tentamen Lineaire Algebra I van 18/1/1999.

1 $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 11 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 8 \\ 0 & -4 & -8 & -4 & -16 & -12 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 10 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ De oplossing van $AX = B$ is dus $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2 (a) $x_3 = \dfrac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \dfrac{-1}{12}\, 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \dfrac{-1}{12} \cdot 4\,(-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \dfrac{-1}{12} \cdot 4(-1)(-4) = -\dfrac{4}{3}$

(b) Via cofactor van a_{23} die is $-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(16-2) = -14$. Dus $c_{32} = \dfrac{7}{6}$.

3 (a) Noem matrix A. Kolommen afhankelijk. Dan $\det A = 0$. Dus $\det A^T = 0$ en dus de kolommen van A^T afhankelijk, m.a.w. de rijen van A zijn afhankelijk.

(b) Fout. Bv. $A = [0]$. Dan $x = 1$ oplossing van $Ax = 0$, maar $A^T = (0)$ is niet inverteerbaar.

(c) Fout. Neem $A = [1\ 0]$. Dan $[1\ 0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1 = a_1$ en $[1\ 0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0 = a_2$ maar A niet inverteerbaar.

(d) Fout. Neem $A = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ en $C = (1\ 0)$. Dan $CA = I_1$ maar $Ax = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $(=b)$ heeft geen oplossing.

(e) Uit $CA = I$ volgt $A^T C^T = I$. Dus $A^T C^T b = b$ voor iedere $b \in \mathbb{R}^m$. Dus $x = C^T b$ is een oplossing van $A^T x = b$.

4 De matrix van S is $[S(e_1)\ S(e_2)\ S(e_3)\ S(e_4)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Daarom is de matrix van U:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en is de matrix van V: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5 (a) Kies $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, de kolommen waarin de spillen verschijnen.

(b) $[b]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Dus $b = a_1 + a_2 + a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Verder $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en

dus $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Dus $[b]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $[a_1\ a_2\ a_4] = [l_1\ l_2\ l_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ volgt uit $A = LU$. Dus $[a_1\ a_2\ a_4][b]_{\mathcal{B}} = [l_1\ l_2\ l_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [b]_{\mathcal{B}}$.

Dus $[b]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [b]_{\mathcal{B}}$. Dus $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ en daarom

$\underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.