Uitwerking 2e deeltentamen Wiskunde I 16/12/99

1. a) $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$.

b) Geen randpunten en geen punten waar f niet dif.baar is. Dus alleen $f'(x)=0$ te onderzoeken: $f'(x)=0 \Rightarrow x=+1$ of $x=-1$

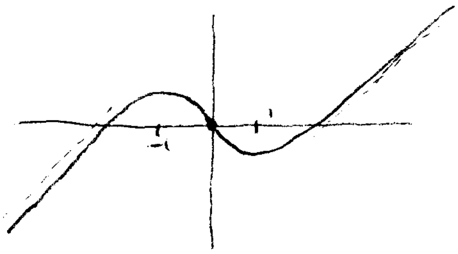
Dus f heeft een lokaal minimum in $x=+1$ ter grootte $f(1) = 1-\pi/2$ en een lokaal maximum in $x=-1$ ter grootte $f(-1) = -1+\pi/2$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to\infty} -2\arctan x = -\pi$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to-\infty} -2\arctan x = \pi$

dus als $x \to \infty$ gedraagt f zich als $x-\pi$ en als $x\to-\infty$ als $x+\pi$.

d)



(Zie onderdeel c) voor een uitleg hoe de grafiek van f loopt voor $x\to\infty$ en $x\to-\infty$)

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2+\sin x)^7}{x^7} = \lim\limits_{x\to 0} \left(x + \frac{\sin x}{x}\right)^7 = (0+1)^7 = 1$

3. a) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx \;\underset{dt=\frac{1}{x}dx}{\overset{t=\ln x}{=\!=}}\; \int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

b) $\int_0^\infty x^2 e^{-2x}\,dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t x^2 e^{-2x}\,dx = \lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\Big|_0^t + \int_0^t x e^{-2x}\,dx\right) =$

$= \lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx\right) =$

$= \lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^t\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}t^2e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right) + \frac{1}{4}$ $= \frac{1}{4}$

4. Eerst homogeen: $y''+2y'+5y=0$. $y=e^{\lambda x}$ stellen levert $\lambda^2+2\lambda+5=0$
dus $(\lambda+1)^2=-4$
dus $\lambda=-1\pm 2i$

Dus opl. homogene vgl: $y_h=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\sin 2x$.
Particuliere opl:
$y_p=Ax+B$; dus $y_p'=A$ en $y_p''=0$. Dit invullen in de inhomogen dv.:

$$0+2A+5Ax+5B=5x-3 \Rightarrow A=1 \text{ en } B=-1 \Rightarrow y_p=x-1$$

Dus algemene oplossing luidt: $y=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\sin 2x+x-1$.
Beginwaarden: $y(0)=-1$: $-1=c_1-1 \Rightarrow c_1=0$
$y'(0)=-1$: $y'(x)=-c_2e^{-x}\sin 2x+2c_2e^{-x}\cos 2x+1$ (want $c_1=0$)
dus $y'(0)=-1=2c_2+1$ dus $c_2=-1$.
Totale opl. $y=x-1-e^{-x}\sin 2x$.

5. (i) ($1\frac{1}{2}$ PUNT) $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy-2z^2\\x^2+z\\y-4xz\end{pmatrix}$

(ii) ($1\frac{1}{2}$ PUNT) $\operatorname{div} g(x,y,z)=\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}=2xy+z-4xz$

(iii) (2 PUNTEN) $\operatorname{rot} g(x,y,z)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}=-y\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2z^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-x^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\2z^2\\-x^2\end{pmatrix}$

6. Stel $\underline{u}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Dan is het stelsel te schrijven als $\underline{u}'(t)=A\underline{u}(t)$ met
$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$. Eigenwaarden A: $\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\-1&1-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&1-\lambda\\1&1\end{vmatrix}=$

$=(2-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+1]+(-2+\lambda)=(2-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+\cancel{1}-\cancel{1}]=(2-\lambda)(\lambda-4)\lambda=0$
Levert $\lambda_1=0$ $\lambda_2=2$ $\lambda_3=4$.
Eigenvectoren: $\lambda_1=0$: $\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}\underline{x}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&5/2\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\underline{x}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ $\quad\underline{x}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda_2=2$: $\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\underline{x}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{x}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\lambda_3=4$: $\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&-3&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\underline{x}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-3&3/2\\0&0&0\end{pmatrix}\underline{x}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

dus algemene oplossing: $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.