
Tweede Deeltentamen Lineaire Algebra 1

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit

docent: R. Planqué

15 December 2014, 15:15 - 17:15.

Motiveer al je antwoorden

Opgave 1

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Bepaal de rang van A .
- b) Geef een basis voor de nulruimte van A .
- c) Bepaal de eigenwaarden van A en bepaal een basis voor elk van de bijbehorende eigenruimtes.
- d) Bepaal de diagonalisatie van A , dat wil zeggen, een inverteerbare matrix P en een diagonaal-matrix D zodat $A = PDP^{-1}$.

Opgave 2

Laat $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ en $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases zijn van $\mathbb{R}^2$ met de volgende vectoren,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Bereken de coördinaat-transformatiematrix $P_{B \leftarrow C}$.
- b) Bereken de coördinaatvector $[\mathbf{v}]_B$, waarbij $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Opgave 3

$\mathbb{P}_n$ is de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner of gelijk aan n .

- a) Laat zien dat de verzameling

$$\{1 - 2t, t - t^3, 2 + t^2 + t^3\} \subset \mathbb{P}_3$$

lineair onafhankelijk is.

Voor $p(t)$ en $q(t)$ in $\mathbb{P}_2$ wordt het inproduct tussen $p(t)$ en $q(t)$ gegeven door

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

- b) Laat $W = \text{Span}\{1, t\} \subset \mathbb{P}_2$. Bepaal een orthogonale basis voor W met behulp van het Gram-Schmidt proces.
- c) Laat $y(t) = t^2$. Bepaal het polynoom in W dat $y(t)$ het best benadert met betrekking tot bovenstaand inproduct.

Opgave 4

Het vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Laat $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het stelsel $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}$.

Opgave 5

Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Laat A en B $n \times n$ matrices zijn. Als A en B gelijksoortig zijn, dan hebben A en B dezelfde eigenwaarden.
- b) Een $n \times n$ matrix A is niet diagonaliseerbaar als A minder dan n verschillende eigenwaarden heeft.
- c) Laat A een $m \times n$ matrix zijn. Dan geldt $\text{Nul}(A^T) = (\text{Col } A)^\perp$.
- d) Een matrix met orthogonale kolommen heeft ook orthogonale rijen.

Opgave 6

Laat $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$ een kwadratische vorm zijn op $\mathbb{R}^2$. Bereken een matrix P zodat in de variabelen $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ de kwadratische vorm geen kruistermen y_1y_2 heeft.

Normering					
1: a) 2	2: a) 3	3: a) 2	4: 4	5: a) 3	6: 4
b) 2	b) 2	b) 3		b) 3	
c) 5		c) 3		c) 3	
d) 3				d) 3	

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1.$$