
Eerste Deeltentamen Lineaire Algebra 1
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit
docent: R. Planqué
23 Oktober 2014, 12:00 - 14:00.

Opgave 1

De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + y \\ x - y \end{bmatrix}.$$

- a) Bepaal de standaardmatrix behorende bij de afbeelding T .
- b) Is T een injectieve (one-to-one) afbeelding?

Opgave 2

Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ k \end{bmatrix}.$$

- a) Voor welke waarde(n) van de constante k spannen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ op?
- b) Laat $k = 5$. Ga na of de vectorvergelijking $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_2$ een unieke oplossing heeft.
- c) Laat $k = 5$. Heeft de vectorvergelijking $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ een unieke oplossing voor iedere $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^3$? Motiveer je antwoord.

Opgave 3

Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Bepaal de LU -decompositie van A , en gebruik deze om de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op te lossen.
- b) Geef een beschrijving van de nulruimte van A .

Opgave 4

Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Bepaal de inverse van A .
- b) Bepaal met behulp van de Regel van Cramer de component x_3 uit de oplossing $\mathbf{x}$ van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Opgave 5

Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) De afbeelding $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $T(x) = |x|$ (de absolute waarde van x), is een lineaire transformatie.
- b) Als A^2 invertierbar is, dan A ook invertierbar.
- c) Als de $n \times n$ matrix A invertierbar is, dan geldt $\text{Col } A = \mathbb{R}^n$.
- d) A is een $m \times n$ matrix. Als $m > n$, dan heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oplossingen voor alle $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^m$.

Opgave 6

Laat $M_{2 \times 2}$ de vectorruimte van 2×2 matrices zijn, en $V = \{A \in M_{2 \times 2} : A = A^T\}$. Toon aan dat V een deelruimte is van $M_{2 \times 2}$.

Normering					
1: a) 3	2: a) 2	3: a) 6	4: a) 6	5: a) 3	6: 4
b) 3	b) 2	b) 2	b) 3	b) 3	
	c) 2			c) 3	
				d) 3	

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1.$$