

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ worden gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- b) Geef een basis voor de kolomruimte van A .

Een lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- c) Is T injectief (one-to-one)? Is T surjectief (onto)?
[Verklaar je antwoorden.]

2. De matrix B is gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de inverse van B .

3. De matrix C is gegeven door:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de determinant van C (als functie van k).
- b) Voor welke k is de matrix $C^T C$ inverteerbaar?

4. $\mathbb{P}_3$ is de vectorruimte van alle polynomen $\mathbf{p}$ van graad kleiner dan of gelijk aan 3, inclusief het nulpolynoom. De polynomen $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ zijn gegeven door

$$p_1(t) = t^3 - t, \quad p_2(t) = t^2 - 1 \quad \text{en} \quad p_3(t) = t^3 - t^2.$$

Ga na of de volgende beweringen waar zijn [motiveer je antwoorden]:

- a) $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ is een lineair onafhankelijke verzameling in $\mathbb{P}_3$.
- b) $\text{Span} \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\} = \mathbb{P}_3$.

Z.O.Z.

5. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- A is een $m \times n$ matrix. Als $n > m$ dan heeft het stelsel $Ax = b$ oplossingen voor alle $b \in \mathbb{R}^m$.
 - A, B, C en D zijn 2×2 matrices. Als A, B, C en D inverteerbaar zijn, dan is ook de 4×4 blokmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ inverteerbaar.
 - A en B zijn inverteerbare matrices waarvoor geldt $AB = BA$.
Dan geldt ook $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
 - Het vlak met vergelijking $x + 2y - 3z = 1$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$.
6. Laat $M_{2 \times 2}$ de vectorruimte zijn van alle 2×2 matrices. We definiëren $S_{2 \times 2}$ als de verzameling van alle symmetrische 2×2 matrices (d.w.z. alle 2×2 matrices A waarvoor geldt $A = A^T$).
- Laat zien dat $S_{2 \times 2}$ een deelruimte is van $M_{2 \times 2}$.
 - Geef een basis voor $S_{2 \times 2}$. [Verklaar je antwoord.]

Normering:

1 : a) 4	2 : 5	3 : a) 2	4 : a) 3	5 : 8	6 : a) 3
b) 2		b) 2	b) 2		b) 2
c) 3					
9	5	4	5	8	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$