

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{punten totaal}}{5} \quad \text{maximum} = 45 \text{ punten}$$

Het gebruik van het boek, aantekeningen, formulebladen of een (grafische) rekenmachine bij het tentamen is niet toegestaan.

1. Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & a & -a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonaliseerbaar? Als dit de geval is, bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonalmatrix D zodat $A = PDP^{-1}$. (10 punten)

2. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Bepaal een vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ zodat $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ een kleinste kwadraten oplossing voor $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is. (4 punten)

3. Laat A een (1000×1010) -matrix zijn met $\dim \text{Nul } A = 10$. Laat zien dat de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voor alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1000}$ een oplossing heeft. (6 punten)

4. Zij $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ en zij $W = \text{span}\{\mathbf{w}\} \subset \mathbb{R}^n$ de deelruimte opgespannen door $\mathbf{w}$. Zij $\text{proj}_W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: \mathbf{x} \mapsto \text{proj}_W(\mathbf{x})$ de orthogonale projectie op W .

- (a) Stel $n = 3$ en $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (i) Bereken $\text{proj}_W\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. (2 punten)

- (ii) Bepaal de matrix $A = [\text{proj}_W]_{\mathcal{B}}$ voor de lineaire transformatie proj_W ten opzichte van de basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. (4 punten)

- (b) Zij $n > 1$, zij $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ een basis en zij $A = [\text{proj}_W]_{\mathcal{B}}$ de matrix van de lineaire transformatie $\text{proj}_W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Laat zien dat 0 en 1 eigenwaarden van A zijn. (4 punten)

5. Zonder verdere bewijs kan je aannemen, dat de verzameling $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\} \subset \mathbb{P}_2$ een basis voor de vectorruimte van alle polynomen van graad ≤ 2 is en dat $\langle p(t), q(t) \rangle = ([p(t)]_{\mathcal{B}})^T [q(t)]_{\mathcal{B}}$ een inwendig product op $\mathbb{P}_2$ defineert.
- (a) Bereken de coördinatenvector $[t^2]_{\mathcal{B}}$. (2 punten)
 - (b) Bepaal een polynoom $p(t)$ zodat $p(t) \perp t^2$. (3 punten)
 - (c) Bepaal een orthonormale basis voor $\mathbb{P}_2$ ten opzichte van het boven aangegevene inwendig product. (4 punten)
6. Zij $W \subset \mathbb{R}^n$ een deelruimte, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset W$ een basis voor W en $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\} \subset W^\perp$ een basis voor het orthogonale complement $W^\perp$ van W .
- (a) Laat zien: Als $\mathbf{u} \in W$ en $\mathbf{u} \in W^\perp$ dan is $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. (2 punten)
 - (b) Toon aan dat de vereniging $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ een basis voor $\mathbb{R}^n$ is. (4 punten)