

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{5}$ maximum = 45

Het gebruik van het boek, aantekeningen, formulebladen of een (grafische) rekenmachine bij het tentamen is niet toegestaan.

1. Voor welke $t \in \mathbb{R}$ heeft het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= t \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(a) precies een oplossing, (b) oneindig veel oplossingen en (c) geen oplossing?

(6 punten)

2. Zijn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ drie vectoren in $\mathbb{R}^3$.

(a) Laat zien dat $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$.

(3 punten)

(b) Bestaat er een vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ zo dat $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{span}\{\mathbf{w}\}$?

(3 punten)

(c) Is $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathbb{R}^3$?

(2 punten)

3. Zij $t \in \mathbb{R}$ en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ drie vectoren in $\mathbb{R}^3$.

(a) Voor welke waarden van t zijn de drie vectoren lineair onafhankelijk?

(3 punten)

(b) Zij $t = 2$ en A de matrix $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$. Is A dan inverteerbaar?

(2 punten)

4. Zij $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ een lineaire transformatie zo dat

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bepaal de standaardmatrix voor T .

(5 punten)

5. Zij A een $(m \times n)$ -matrix.

(a) Laat zien waarom de volgende uitspraken juist is:

Als de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn dan is $m \geq n$. (4 punten)

(b) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: Als $m \geq n$, dan zijn de kolommen van A lineair onafhankelijk. (2 punten)

6. Zij $t \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ -1 & 1 & -t \end{bmatrix}$.

(a) Voor welke $t \in \mathbb{R}$ is B inverteerbaar? (4 punten)

(b) Voor welke $t \in \mathbb{R}$ is er een vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq 0$, zo dat $A\mathbf{v} = t\mathbf{v}$.

(Hint: $B = A - tI_3$)

(3 punten)

7. Stel $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Gebruik de regel van Cramer om de oplossingen voor de vergelijking $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ te bepalen. (4 punten)

(b) Laat zien dat de inverse A^{-1} ook een bovendriehoeksmatrix is.

(4 punten)