

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{8}$, totaal = 72.

Het gebruik van het boek, aantekeningen, formulebladen of een (grafische) rekenmachine bij het tentamen is niet toegestaan.

1. Gegeven is de deelverzameling $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.
 - a) Toon aan dat U een deelruimte is. Wat is de dimensie van U ? (5 punten)
 - b) Bepaal een (3×3) -matrix A zodat $U = \text{Nul } A$ de nulruimte van A is. Wat is de rang van A ? (6 punten)
 - c) Bepaal een (3×3) -matrix B zodat $U = \text{Col } B$ de kolomruimte van B is. Wat is de dimensie van $\text{Nul } B$. (6 punten)
2. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonale matrix D zodat $D = P^{-1}AP$. (9 punten)
 - b) Is de quadratische vorm $Q(x) = x^T Ax$ positief definit, negatief definit of indefinit? (4 punten)
3. Laat A een diagonaliseerbare $(n \times n)$ -matrix zijn.
 - a) Laat zien: Als $A^3 = 0$, dan is ook $A = 0$. (6 punten)
 - b) Laat zien: Als $A^2 + A + I_n = 0$, dan heeft A geen reële eigenwaarde. (6 punten)

4. Zij $\mathbb{P}_2$ de vectorruimte van de polynomen van de graad ten hoogste 2. De verzameling $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ is een basis voor $\mathbb{P}_2$. Zij het inwendige product ~~of~~ ^{op} $\mathbb{P}_2$ gegeven door

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt.$$

- a) Zij $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ de lineaire transformatie gegeven door $T(a+bt+ct^2) = at+bt^2+c$. Bepaal de matrix $[T]_{\mathcal{B}}$ voor T ten overzichte van de basis $\mathcal{B}$. (5 punten)
- b) Bepaal een orthogonale basis voor $\mathbb{P}_2$. (5 punten)

5. Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossing van $Ax = b$ voor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal ook de afstand tussen b en de kolomruimte $\text{Col } A$ van A . (9 punten)

6. Wij noteren het standaard inwendige product op $\mathbb{R}^n$ als $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- a) Laat $u, v \in \mathbb{R}^n$. Toon aan: Als $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ voor alle $w \in \mathbb{R}^n$ dan is $u = v$. (5 punten)
- b) Laat A een $(n \times n)$ -matrix zijn. Toon aan: Als $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ voor alle $v, w \in \mathbb{R}^n$, dan is A inverteerbaar en een orthogonale matrix. (6 punten)