

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen

Tentamen Lineaire Algebra 1 28 augustus 2009

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine of boek is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef niet alleen antwoorden maar ook de berekeningen.

We werken in $\mathbb{R}^n$ met het standaardinproduct.

Opgave 1. (20 punten)

Gegeven zijn de matrix A en de vector w door

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verder zij T de lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$.

- Laat zien dat w een eigenvector is van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
- Bepaal een basis voor de eigenruimte van A bij de eigenwaarde 6.
- Bepaal een orthogonale basis $\mathcal{B}$ van $\mathbb{R}^3$ die bestaat uit eigenvectoren van A .
- Bepaal $D = [T]_{\mathcal{B}}$, de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.
- We schrijven $\mathcal{E}$ voor de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$. Geef de overgangsmatrix $P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ aan.
- Bereken $P^T P$ en de overgangsmatrix $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$.
- Wat is het verband tussen $[T]_{\mathcal{B}}$, $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$, $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ en A ?

Opgave 2. (15 punten)

Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Welke van deze matrices zijn diagonaliseerbaar en welke niet? Motiveer je antwoord kort.

Z.O.Z.

Opgave 3. (15 punten)

Gegeven zijn de matrix A en de vector b door

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1+t \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 3+t \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

waarbij t een reëel getal is.

- Voor welke waarden van t heeft de vergelijking $Ax = b$ ten minste één oplossing?
- Zij nu $t = 0$. Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossing van $Ax = b$.

Opgave 4. (10 punten)

Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ s & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

waarbij $s \in \mathbb{R}$ met $s^2 \neq 4$. Stel x is een oplossing van $Ax = b$.

Bepaal x_2 met behulp van de regel van Cramer. Waarom mag je deze toepassen?

Opgave 5. (10 punten)

Laat A en 9×7 -matrix zijn en B een 7×9 -matrix. Laat zien dat AB niet inverteerbaar kan zijn.

Opgave 6. (10 punten)

- Bewijs:

Als een $n \times n$ -matrix A orthogonaal diagonaliseerbaar is, dan is A symmetrisch.

- Gebruik het vorige deel om het volgende te bewijzen:

Als A en B twee orthogonaal diagonaliseerbare $n \times n$ -matrices zijn met $AB = BA$, dan is AB orthogonaal diagonaliseerbaar.

Opgave 7. (10 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 42 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vind de differentieerbare functie $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt:

$$x' = Ax \quad \text{en} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$