

Uitwerking tweede deeltentamen Lineaire Algebra 1 25 mei 2009

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{10}$$

Opgave 1. (10 punten) Zij $W \subset \mathbb{R}^3$ de door $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

voortgebrachte deelruimte, zij $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bereken een orthogonale basis van W en de afstand van v tot W .

Gram-Schmidt: Als $u_1 = w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en

$$u_2 = w_1 - \frac{w_1 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dan is (u_1, u_2) een orthogonale basis van W . De afstand $\text{dist}(v, W)$ van v tot W wordt gegeven door de lengte van

$$z = v - \text{proj}_W v = z - \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{2}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dus $\text{dist}(v, W) = \sqrt{2}$.

Opgave 2. (15 punten)

Zij A een reële 5×7 -matrix met kolommen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$.

Zij $B = [a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7]$ de 5×5 -matrix met kolommen a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 . Stel dat $\det B = 2009$.

Laat zien: De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7, x \mapsto A^T x$ is injectief (“one-to-one”).

Omdat $\det B = 2009 \neq 0$, is B inverteerbaar, dus brengen volgens de stelling over inverteerbare matrices de kolommen $a_3, \dots, a_7$ de vectorruimte $\mathbb{R}^5$ voort, dus brengen ook de vectoren $a_1, \dots, a_7$ de $\mathbb{R}^5$ voort, dus is $\text{rank } A = 5$. Omdat $\text{rank } A^T = \text{rank } A$ geldt $\text{rank } A^T = 5$ dus $\dim \text{Nul } A^T = 5 - 5 = 0$. Dus $\text{Nul } A^T = \{0\}$, dus T is injectief.

Opgave 3. (10 punten)

Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Bereken het karakteristiek polynoom van A .
 - b) Bewijs of weerleg: A is diagonaliseerbaar.
-
- a) Omdat A een boven-driehoeks-matrix is, geldt voor het karakteristiek polynoom van A dat $p_A(t) = (1 - t)^2(2 - t)$.
 - b) De multipliciteit van de wortel 1 in $p_A(t)$ is 2, daarentegen heeft

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rang 2, dus $\dim E_1(A) = 1 < 2$, dus A is niet diagonaliseerbaar.

Opgave 4. (10 punten)

Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Bewijs of weerleg: A is diagonaliseerbaar.

Omdat A symmetrisch is, is A volgens de stelling over diagonaliseerbaarheid van symmetrische matrices (zelfs orthogonaal) diagonaliseerbaar.

Opgave 5. (20 punten)

Zij $L \subset \mathbb{R}^2$ de deelruimte die wordt voortgebracht door de vector

$$w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Zij $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding die een vector spiegelt in L .

- a) Bepaal een vector u_1 van lengte 1 met $\text{Span}(w_1) = \text{Span}(u_1)$.
- b) Bepaal een vector u_2 van lengte 1 die loodrecht staat op L .
- c) Leg kort uit waarom $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ een orthonormale basis is van $\mathbb{R}^2$.
- d) Bepaal $A = [T]_{\mathcal{B}}$, de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.
- e) We schrijven $\mathcal{E}$ voor de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$. Geef de overgangsmatrix $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ en de overgangsmatrix $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ aan.
- f) Bepaal $B = [T]_{\mathcal{E}}$, de matrix van T ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$.

a) Neem $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

b) Neem $u_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

- c) Omdat u_1 en u_2 loodrecht staan op elkaar en lengte 1 hebben, is (u_1, u_2) een orthonormaal stelsel in $\mathbb{R}^2$ en daarom automatisch een orthonormale basis.
- d) De kolommen van A zijn de $\mathcal{B}$ -coördinatenvectoren van $T(u_1) = u_1$ en $T(u_2) = -u_2$, dus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- e) De kolommen van de overgangsmatrix $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ zijn de $\mathcal{E}$ -coördinatenvectoren van u_1 en u_2 , dus

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

en omdat dit een orthogonale en symmetrische matrix is geldt

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = (P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}})^T = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

f) Er geldt

$$\begin{aligned} B = [T]_{\mathcal{E}} &= P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opgave 6. (15 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vind de differentieerbare functie $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt:

$$x' = Ax \quad \text{en} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Het karakteristiek polynoom van A is

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ -1 & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4).$$

De matrix A heeft dus eigenwaarden 2 en 4.

$$E_2(A): A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dus } E_2(A) \text{ heeft basis } b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$E_4(A): A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dus } E_4(A) \text{ heeft basis } b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Er geldt dus $x(t) = c_1 e^{2t} b_1 + c_2 e^{4t} b_2$, voor zekere $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ met $x(0) = c_1 b_1 + c_2 b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Oplossen van deze vergelijking:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 14 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \end{array} \right]$$

Dus $c_1 = 3$ en $c_2 = -7$, dus

$$x(t) = 3e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 7e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 7. (10 punten)

Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossingen van $Ax = b$ voor

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Los op $A^T A \hat{x} = A^T b$. Er geldt

$$A^T A = \begin{bmatrix} 22 & -11 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad A^T b = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dus oplossen:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 22 & -11 & -11 \\ -11 & 6 & 4 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cc|c} -11 & 6 & 4 \\ 22 & -11 & -11 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -11 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} -11 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

De (enige) kleinste-kwadraten-oplossing is dus $\hat{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.