

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen

Tweede deeltentamen Lineaire Algebra 1 25 mei 2009

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine of boek is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef niet alleen antwoorden maar ook de berekeningen.

Tenzij anders vermeld is n een natuurlijk getal. We werken in $\mathbb{R}^n$ met het standaardinproduct.

Opgave 1. (10 punten) Zij $W \subset \mathbb{R}^3$ de door $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

voortgebrachte deelruimte, zij $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bereken een orthogonale basis van

W en de afstand van v tot W .

Opgave 2. (15 punten)

Zij A een reële 5×7 -matrix met kolommen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$.

Zij $B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{bmatrix}$ de 5×5 -matrix met kolommen a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 .

Stel dat $\det B = 2009$.

Laat zien: De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7, x \mapsto A^T x$ is injectief ("one-to-one").

Opgave 3. (10 punten)

Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Bereken het karakteristiek polynoom van A .

b) Bewijs of weerleg: A is diagonaliseerbaar.

Opgave 4. (10 punten)

Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Bewijs of weerleg: A is diagonaliseerbaar.

Z.O.Z.

Opgave 5. (20 punten)

Zij $L \subset \mathbb{R}^2$ de deelruimte die wordt voortgebracht door de vector

$$w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Zij $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding die een vector spiegelt in L .

- a) Bepaal een vector u_1 van lengte 1 met $\text{Span}(w_1) = \text{Span}(u_1)$.
- b) Bepaal een vector u_2 van lengte 1 die loodrecht staat op L .
- c) Leg kort uit waarom $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ een orthonormale basis is van $\mathbb{R}^2$.
- d) Bepaal $A = [T]_{\mathcal{B}}$, de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.
- e) We schrijven $\mathcal{E}$ voor de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$. Geef de overgangsmatrix $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ en de overgangsmatrix $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ aan.
- f) Bepaal $B = [T]_{\mathcal{E}}$, de matrix van T ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$.

Opgave 6. (15 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vind de differentieerbare functie $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt:

$$x' = Ax \quad \text{en} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Opgave 7. (10 punten)

Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossingen van $Ax = b$ voor

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$