

Uitwerking eerste deeltentamen Lineaire Algebra 1 25 maart 2009

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{10}$$

Opgave 1. (10 punten)

	juist	onjuist
Er bestaan 5 lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^4$	☐	☒
Er bestaan 4 lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^5$	☒	☐
Als x, y, z vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A is een $m \times n$ -matrix met Ax, Ay, Az lineair onafhankelijk, dan zijn x, y, z lineair onafhankelijk.	☒	☐
Als x, y, z lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A is een $m \times n$ -matrix, dan zijn Ax, Ay, Az lineair onafhankelijk.	☐	☒
Een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is nooit surjectief (“onto”).	☐	☒
Een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ is nooit surjectief (“onto”).	☒	☐
Als $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, dan is de vergelijking $Ax = b$ voor alle $m \times n$ -matrices A consistent.	☒	☐
Als $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ lineair onafhankelijk zijn, dan zijn ook x en y lineair onafhankelijk.	☒	☐
Als $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, met x en y lineair onafhankelijk, en x en z lineair onafhankelijk, dan zijn ook y en z lineair onafhankelijk.	☐	☒
Als A een $n \times n$ -matrix met reële elementen is, dan is $\det(A^4) \geq 0$.	☒	☐

Opgave 2. (10 punten)

Laat A een $n \times n$ -matrix met reële elementen zijn. Bewijs: Als A^2 invertierbar is dan is ook A invertierbar.

Variant 1: A^2 invertierbar, dus er bestaat een $n \times n$ -matrix W met $A^2W = I$. Dan geldt voor $D = AW$ dat $AD = I$ en dus is A volgens de stelling over inverterbare matrices invertierbar.

Variant 2: Als A^2 invertierbar is $\det(A^2) \neq 0$. Omdat $\det(A^2) = (\det A)^2$ volgt $\det A \neq 0$, dus is A invertierbar.

Opgave 3. (20 punten)

Laat $A = LU$, waarbij

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bereken A en bepaal de oplossingen van $Ax = b$, waarbij $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Geef niet alleen het antwoord maar ook de berekening.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \\ 3 & 1 & 10 & 32 \end{bmatrix}$$

Eerst $Ly = b$ oplossen. Aangevulde matrix is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{dus } y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Nu $Ux = y$ oplossen. Aangevulde matrix is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{dus } x = \begin{bmatrix} 23 \\ -17 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ is de enige oplossing van } Ax = b.$$

Opgave 4. (20 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

waarbij $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Leg kort uit waarom A inverteerbaar is. Gebruik de formule van Cramer voor de inverse matrix om aan te tonen dat A^{-1} een boven-driehoeks-matrix is, dus dat de elementen van A^{-1} beneden de diagonaal allemaal 0 zijn.

De 4×4 -matrix A is al in echelonvorm en duidelijk rijequivalent met de identiteitsmatrix, dus A is inverteerbaar. (Alternatief: $\det A = 1 \neq 0$)

Volgens de formule van Cramer geldt dan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix},$$

waarbij $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ de (i, j) -cofactor. We moeten dus nagaan dat de zes cofactoren $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{24}$ en C_{34} gelijk zijn aan nul. Er geldt

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (driehoeksmatrix met 0 op diagonaal/een kolom nul),}$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (driehoeksmatrix met 0 op diagonaal/een kolom nul),}$$

$$C_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (driehoeksmatrix met 0 op diagonaal/een kolom nul),}$$

$$C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (driehoeksmatrix met 0 op diagonaal/eerste en twee-}$$

de kolom lineair afhankelijk),

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (driehoeksmatrix met 0 op diagonaal/een rij nul) en}$$

$$C_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (driehoeksmatrix met 0 op diagonaal/een rij nul).}$$

Opgave 5. (10 punten)

Zij $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de rotatie van $\mathbb{R}^2$ om de oorsprong over $\frac{\pi}{2}$ radialen.

Zij $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Bepaal de standaardmatrix A van de samengestelde lineaire afbeelding $T = I \circ D$.

We schrijven $e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. De standaardmatrix A is dan gegeven als $A = [T(e_1) \ T(e_2)]$.

Er geldt $D(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en dus $T(e_1) = I \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Verder geldt $D(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en dus $T(e_2) = I \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dus

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opgave 6. (10 punten)

Voor welke $t \in \mathbb{R}$ is de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, met

$$A = \begin{bmatrix} 5-t & 1 & 4-t \\ -1 & 3-t & 9 \\ 5-t & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

surjectief (“onto”)? Geef uitleg bij je antwoord.

Variant 1: T is surjectief dan en slechts dan als A in iedere rij een pivot heeft. Er geldt

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{bmatrix} 5-t & 1 & 4-t \\ -1 & 3-t & 9 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3-t & 9 \\ 5-t & 1 & 4-t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & 3-t & 9 \\ 0 & 16-8t+t^2 & 49-10t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dus A heeft in iedere rij een pivot $\Leftrightarrow t \neq 0$ en $(t-4)^2 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$ en $t \neq 4$.

Variant 2: Volgens de stelling over inverteerbare matrices is T surjectief dan en slechts dan als A inverteerbaar is, en dit geldt dan en slechts dan als $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5-t & 1 & 4-t \\ -1 & 3-t & 9 \\ 5-t & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-t & 1 & 4-t \\ -1 & 3-t & 9 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} \\ = t \begin{vmatrix} 5-t & 1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = t(4-t)^2,$$

dus $\det A \neq 0$ dan en slechts dan als $t \neq 0$ en $t \neq 4$.

Opgave 7. (10 punten)

Laat $V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differentieerbaar}\}$ de vectorruimte van differentieerbare functies op $\mathbb{R}$ zijn (je hoeft niet aan te tonen dat dit een vectorruimte is).

Definieer $U := \{f \in V \mid f'(0) = 0\}$ en $W := \{f \in V \mid f'(1) = 1\}$.

Toon aan dat U een lineaire deelruimte van V is. Is W ook een lineaire deelruimte van V ? Motiveer je antwoord.

- $0 \in U$
- Stel $f, g \in U$. Dan geldt $f'(0) = 0$ en $g'(0) = 0$ en dus $(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = 0 + 0 = 0$, dus ook $f+g \in U$.
- Stel $f \in U$ en $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt $f'(0) = 0$ en dus $(cf)'(0) = cf'(0) = c \cdot 0 = 0$, dus ook $cf \in U$.

Conclusie: U is een lineaire deelruimte van V .

Omdat $0 \notin W$ is W geen lineaire deelruimte van V .