

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen
Eerste deeltentamen Lineaire Algebra 1 25 maart 2009

Naam:

Studentnr.:

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine of boek is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Tenzij anders vermeld zijn n en m natuurlijke getallen ≥ 1 .

Opgave 1. (10 punten)

Geef aan of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Een goed antwoord levert +1 punt op, een verkeerd antwoord −1 punt. Geef dus alleen een antwoord als je het weet. Een negatief aantal punten wordt gerekend als 0 punten.

	juist	onjuist
Er bestaan 5 lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^4$	☐	☐
Er bestaan 4 lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^5$	☐	☐
Als x, y, z vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A is een $m \times n$ -matrix met Ax, Ay, Az lineair onafhankelijk, dan zijn x, y, z lineair onafhankelijk.	☐	☐
Als x, y, z lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn en A is een $m \times n$ -matrix, dan zijn Ax, Ay, Az lineair onafhankelijk.	☐	☐
Een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is nooit surjectief ("onto").	☐	☐
Een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ is nooit surjectief ("onto").	☐	☐
Als $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, dan is de vergelijking $Ax = b$ voor alle $m \times n$ -matrices A consistent.	☐	☐
Als $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ lineair onafhankelijk zijn, dan zijn ook x en y lineair onafhankelijk.	☐	☐
Als $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, met x en y lineair onafhankelijk, en x en z lineair onafhankelijk, dan zijn ook y en z lineair onafhankelijk.	☐	☐
Als A een $n \times n$ -matrix met reële elementen is, dan is $\det(A^4) \geq 0$.	☐	☐

Opgave 2. (10 punten)

Laat A een $n \times n$ -matrix met reële elementen zijn. Bewijs: Als A^2 invertierbar is dan is ook A invertierbar.

Z.O.Z

Opgave 3. (20 punten)

Laat $A = LU$, waarbij

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bereken A en bepaal de oplossingen van $Ax = b$, waarbij $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Geef niet alleen het antwoord maar ook de berekening.

Opgave 4. (20 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

waarbij $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Leg kort uit waarom A inverteerbaar is. Gebruik de formule van Cramer voor de inverse matrix om aan te tonen dat A^{-1} een boven-driehoeks-matrix is, dus dat de elementen van A^{-1} beneden de diagonaal allemaal 0 zijn.

Opgave 5. (10 punten)

Zij $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de rotatie van $\mathbb{R}^2$ om de oorsprong over $\frac{\pi}{2}$ radialen.

Zij $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Bepaal de standaardmatrix A van de samengestelde lineaire afbeelding $T = I \circ D$.

Opgave 6. (10 punten)

Voor welke $t \in \mathbb{R}$ is de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, met

$$A = \begin{bmatrix} 5-t & 1 & 4-t \\ -1 & 3-t & 9 \\ 5-t & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

surjectief ("onto")? Geef uitleg bij je antwoord.

Opgave 7. (10 punten)

Laat $V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differentieerbaar}\}$ de vectorruimte van differentieerbare functies op $\mathbb{R}$ zijn (je hoeft niet aan te tonen dat dit een vectorruimte is).

Definieer $U := \{f \in V \mid f'(0) = 0\}$ en $W := \{f \in V \mid f'(1) = 1\}$.

Toon aan dat U een lineaire deelruimte van V is. Is W ook een lineaire deelruimte van V ? Motiveer je antwoord.