

Normering:

$1a:1$; $2a:2$; $3a:2$; $4a:2$; $5:12$; $6a:1$;
 $b:3$; $b:2$; $b:2$; $b:5$; $b:2$;
 $c:2$; $c:2$; $c:2$; $c:2$.
 $d:2$; $d:1$;

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{5}$.

1. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Verder is $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

- Bepaal een basis voor V .
- Bepaal de kleinste-kwadratenoplossing van $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] \mathbf{x} = \mathbf{w}$.
- Bepaal een orthonormale basis van V .
- Bepaal de orthogonale(=loodrechte) projectie $\hat{\mathbf{w}}$ van $\mathbf{w}$ op V .

2. Voor alle reële getallen α en β worden de matrix A_α en de vector $\mathbf{b}_\beta$ gegeven door

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \alpha - 1 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta + 1 \end{bmatrix}.$$

- Bepaal voor welke waarde(n) van α en β de vergelijking $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta$ *uniek* oplosbaar is.
- Bepaal voor welke waarde(n) van α en β de vergelijking $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta$ geen oplossing heeft.
- Voor welke waarde(n) van α en β heeft de vergelijking $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta$ meer dan één oplossing? Bepaal de oplossingsverzameling in dit geval.

3. Zij $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Bepaal een basis voor de nulruimte van A (die de dimensie 2 heeft).
- Toon aan dat $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ eigenvectoren zijn van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarden.
- Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zó dat $A = PDP^{-1}$.
- Bepaal $\det(A - \lambda I)$.

Z.O.Z.

4. (a) Zij $A = \begin{bmatrix} 8\frac{1}{2} & -15 \\ 4\frac{1}{2} & -8 \end{bmatrix}$. Bereken het product van de eigenwaarden van A .

(b) Los op:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 8\frac{1}{2}x_1(t) - 15x_2(t), \\ x_2'(t) &= 4\frac{1}{2}x_1(t) - 8x_2(t), \\ x_1(0) &= 1, \\ x_2(0) &= 1. \end{cases}$$

5. Bepaal of de onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een **tegenvoorbeeld**. In het onderstaande zijn de natuurlijke getallen m en n steeds ten minste 2 en is uitsluitend sprake van reële matrices en vectoren.

(a) Zij A een $m \times n$ matrix met $m < n$. Dan is 0 een eigenwaarde van $A^T A$.

(b) Voor de $n \times n$ matrices A en B en de $n \times n$ eenheidsmatrix I_n geldt

$$\begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_n + BA \end{bmatrix}.$$

(c) De kolommen van een matrix A vormen een basis voor de rijruimte van A^T .

(d) Gegeven zijn een $n \times n$ matrix A en een inverteerbare $n \times n$ matrix P . Dan hebben $P^{-1}AP$ en PAP^{-1} dezelfde eigenwaarden.

(e) Als 0 geen eigenwaarden is van A , dan is $\det A \neq 0$.

(f) Zij A een $m \times n$ matrix. Dan heeft $A^T A$ reële eigenwaarden.

6. In de vectorruimte $\mathbb{P}_3$ van de polynomen van de graad ten hoogste 3 inclusief het nulpolynoom geven we de polynomen $b_1(t) = t^3 + t^2 - t + 1$, $b_2(t) = t^3 - t^2 + t + 1$, $b_3(t) = -t^3 + t^2 + t + 2$. Zij $V = \text{Span}\{b_1(t), b_2(t), b_3(t)\}$. Verder is de lineaire transformatie $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door voor een polynoom $p(t)$ te bepalen

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \end{bmatrix},$$

waarbij $p'(t)$ de afgeleide van het polynoom $p(t)$ is.

(a) Zij $q(t) = t^3 - t^2$. Toon aan dat $T(q(t)) = 0$.

(b) Toon aan dat het drietal vectoren $\{T(b_1(t)), T(b_2(t)), T(b_3(t))\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$.

(c) Toon aan dat het stelsel $\{b_1(t), b_2(t), b_3(t)\}$ lineair onafhankelijk is.