

Tentamen lineaire algebra voor BWI
 dinsdag 17 februari 2009, 18.30-21.15 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vijf op te tellen en vervolgens te delen door vijf.

1. Gegeven zijn de volgende matrix en vector:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2a \\ 1 & a & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Hierbij zijn a en b reële getallen.

- (3) (a) Geef alle waarden van a en b waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen oplossingen heeft.
- (2) (b) Voor welke waarden van a is de matrix A inverteerbaar?
- Neem vanaf nu $a = 2$ en $b = 3$.
- (2) (c) Bepaal alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (2) (a) Bepaal de dimensie van de nulruimte van A .
- (2) (b) Is $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een basis voor de nulruimte van A ?
- (2) (c) Is $\text{Nul}(A) = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$?

(2) 3. (a) Gegeven zijn de 3×3 matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 2a + 3d & 2b + 3e & 2c + 3f \end{bmatrix}.$$

Bepaal $\det(B)$ als gegeven is dat $\det(A) = -4$.

- (3) (b) Gegeven zijn matrices C en D zo dat $CDC = I_n$. Beredeneer dat C en D vierkant moeten zijn. Is D inverteerbaar?

- (2) 4. Is 8 een eigenwaarde van de matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 12 & -8 & 4 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$?

- (3) 5. Gegeven is de matrix $B = PDP^{-1}$ met

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ en } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bereken $B^{10}\mathbf{v}$ als $\mathbf{v} = (2, 2, -3)^T$. Doe dit zonder B uit te rekenen!

6. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (5) (a) Welke van deze matrices zijn diagonaliseerbaar en welke niet? Dit kan met relatief weinig rekenwerk beantwoord worden.
- (2) (b) Welke van deze matrices zijn orthogonaal diagonaliseerbaar en welke niet?

7. Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (3) (a) Laat zien dat $\mathbf{p}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op de kolomruimte van A is. Geldt dat ook voor $\mathbf{q}$?
- (2) (b) Bepaal een basis voor het orthogonale complement van de kolomruimte van A .
- (2) (c) Hoeveel kleinste kwadraten oplossingen heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Waarom?
- (2) (d) Geef *een* kleinste kwadraten oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(AANWIJZING: Als je het resultaat van (a) gebruikt kan dit met zeer weinig rekenwerk. Eén kleinste kwadraten oplossing volstaat.)
- (2) 8. (a) Bewijs of weerleg: Een stelsel lineaire vergelijkingen met meer onbekenden dan vergelijkingen heeft oneindig veel oplossingen.
- (2) (b) Bewijs of weerleg: De deelverzameling W van $\mathbb{P}_3$, die bestaat uit alle polynomen die na invullen van 0 de waarde 1 opleveren, is een deelruimte van $\mathbb{P}_3$. (Een voorbeeld van zo'n polynoom is $3x^2 - x + 1$.)
- (2) (c) Gegeven is dat A een vierkante niet-nulmatrix is met de eigenschap dat $A^2 = A$. Toon aan: De enig mogelijke eigenwaarden voor A zijn 0 en 1.

Uitwerking Tentamen lineaire algebra voor BWI, , dinsdag 17 februari 2009.

1. (a) Ga na dat

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2a & 1 \\ 1 & a & 4 & b \\ 1 & a & a^2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2a & 1 \\ 0 & a+2 & 2a+4 & 1+b \\ 0 & 0 & a^2-4 & 3-b \end{array} \right].$$

Onderscheid nu de gevallen $a = -2$, $a = 2$ en de overige mogelijkheden. Invullen van $a = -2$ levert de aangevulde matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+b \\ 0 & 0 & 0 & 3-b \end{array} \right]$$

Als $b \neq 3$ dan volgt uit de derde vergelijking dat het stelsel geen oplossingen heeft. Als $b = 3$ volgt uit de tweede vergelijking dat het stelsel geen oplossingen heeft. Blijkbaar heeft dit stelsel voor geen enkele b oplossingen.

Invullen van $a = 2$ levert de echelonvorm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 1+b \\ 0 & 0 & 0 & 3-b \end{array} \right]$$

en dit heeft geen oplossingen als $b \neq 3$ en oneindig veel oplossingen als $b = 3$.

Voor alle andere a is de eerst gevonden matrix een echelonvorm die in elke rij én in elke kolom (voor de streep) een pivot heeft, zodat het stelsel in die situatie altijd precies één oplossing heeft.

Conclusie: geen oplossingen als $a = -2$ (ongeacht b) of als $a = 2$ en $b \neq 3$.

- (b) Een vierkante matrix is inverteerbaar als A na vegen in elke rij en in elke kolom een pivot heeft. Uit bovenstaande volgt dat

$$A \sim \left[\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 2a \\ 0 & a+2 & 2a+4 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{array} \right].$$

Alleen als $a = 2$ of $a = -2$ heeft niet elke rij of kolom een pivot. Conclusie: A is inverteerbaar als $a \neq 2$ en $a \neq -2$.

- (c) Uit (a) blijkt dat voor $a = 2$ en $b = 3$ geldt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

zodat x_3 vrij is, $x_1 = 1$ en $x_2 = 1 - 2x_3$. Dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Ga na dat

$$A \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Er zijn dus drie kolommen zonder pivot, wat tot gevolg heeft dat $\dim \text{Nul}(A) = 3$.

- (b) Neen, $\mathbf{v}_3$ behoort niet tot $\text{Nul}(A)$ (immers: $A\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$).
- (c) Er geldt dat $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$, zodat $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$. De vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_4$ zijn onafhankelijk, behoren tot $\text{Nul}(A)$ (want $A\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ voor $i = 1, 2$ en 4) en het aantal is gelijk aan de dimensie van $\text{Nul}(A)$. Ze vormen dus een basis voor $\text{Nul}(A)$, wat tot gevolg heeft dat $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\} = \text{Nul}(A)$. Het antwoord op de vraag is dus “ja”.

3. (a) Toepassen van het veegproces leidt tot

$$\det(B) = \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix} =$$

$$3 \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \det(A) = -12.$$

- (b) Als C een $p \times q$ matrix is, dan is CDC alleen gedefinieerd als D een $q \times p$ matrix is. In dat geval is CDC een $p \times q$ matrix. Anderzijds volgt uit het gegeven dat het een $n \times n$ matrix is (het is immers gelijk aan I_n). Blijkbaar is $p = q = n$, zodat C en D vierkant zijn. Omdat de matrices vierkant zijn, kunnen determinanten genomen worden en er volgt

$$1 = \det(I_n) = \det(CDC) = \det(C) \det(D) \det(C) = \det(D) \det(C)^2.$$

De determinant van D is dus ongelijk aan nul, zodat D inverteerbaar is.

4. Als 8 een eigenwaarde zou zijn, dan moet er een niet-nulvector $\mathbf{x}$ bestaan zo dat $A\mathbf{x} = 8\mathbf{x}$ ofwel $(A - 8I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ga na dat vegen van $A - 8I$ een echelonvorm geeft met in elke kolom een pivot. Dat betekent dat het stelsel maar $(A - 8I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ maar één oplossing heeft: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Blijkbaar is 8 geen eigenwaarde van A .
5. de kolommen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ en $\mathbf{p}_3$ van P vormen een basis voor $\mathbb{R}^3$ die volledig uit eigenvectoren van A bestaat (bij eigenwaarden respectievelijk 0, 2 en 2). Ga na dat $\mathbf{v} = 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$, waaruit volgt dat

$$A^{10}\mathbf{v} = 2 \cdot 0^{10} \mathbf{p}_1 - 1 \cdot 2^{10} \cdot \mathbf{p}_2 + 2^{10} \cdot \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2048 \\ -5120 \end{bmatrix}.$$

6. (a) A is een symmetrische matrix en dus diagonaliseerbaar (zelfs orthogonaal diagonaliseerbaar, zie stelling 2 van hoofdstuk 7). B en C zijn allebei bovendriehoeksmatrices. De eigenwaarden staan dus op de diagonaal (stelling 1 van hoofdstuk 5) en zijn in beide gevallen 3 (twee maal) en 2 (één maal). De meetkundige multipliciteit (dat is de dimensie van de eigenruimte) bij eigenwaarde 2 is dus 1 en die van eigenwaarde 3 is 1 of 2 (stelling 7a van hoofdstuk 5). Als de dimensie 2 is, dan is de matrix wel diagonaliseerbaar, anders niet (stelling 7b van hoofdstuk 5). Voor B geldt:

$$\dim E_3 = \dim \text{Nul}(B - 3I) = \dim \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

zodat B wel diagonaliseerbaar is. Voor C geldt:

$$\dim E_3 = \dim \text{Nul}(C - 3I) = \dim \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

zodat C ook diagonaliseerbaar is.

- (b) Volgens stelling 2 van hoofdstuk 7 zijn alleen de symmetrische matrices orthogonaal diagonaliseerbaar. Hier is dat alleen matrix A .

7. (a) $\mathbf{p}$ is gelijk aan de eerste minus de tweede kolom van A dus $\mathbf{p} \in \text{Col}(A)$. Verder is $\mathbf{b} - \mathbf{p} = (1, 1, 2, -2)$ en deze staat loodrecht op alle kolommen van A (het inwendig product is telkens nul), zodat $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in \text{Col}(A)^\perp$. Conclusie: $\mathbf{p}$ is inderdaad de bedoelde orthogonale projectie. $\mathbf{q}$ is niet de orthogonale projectie van $\mathbf{p}$ op $\text{Col}(A)$ omdat deze uniek is en $\mathbf{p}$ het al is. Een andere mogelijkheid is laten zien dat $\mathbf{b} - \mathbf{q}$ niet loodrecht op alle kolommen van A staat.
- (b) Je mag gebruiken dat $\text{Col}(A)^\perp = \text{Nul}(A^T)$. Los dus op $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Als je dat niet weet kan het ook als volgt: stel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ is een vector uit $\text{Col}(A)^\perp$. Dan moet $\mathbf{x}$ loodrecht staan op de vier kolommen van A en moeten de inwendig producten van $\mathbf{x}$ en deze kolommen dus nul zijn. Dit leidt tot de vier vergelijkingen

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Dit is precies het stelsel $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Veeg dus

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{dus} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_3 = \text{vrij} \\ x_4 = \text{vrij} \end{cases}$$

Een basis is dus bijvoorbeeld $\{(1, -1, 4, 0), (-1, -3, 0, 4)\}$.

- (c) De kolommen van A zijn afhankelijk (bijvoorbeeld: de derde kolom is gelijk aan de eerste minus twee maal de tweede) en dus zijn er oneindig veel kleinste kwadraten oplossingen.
- (d) De snelste manier: Een kleinste kwadraten oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is een oplossing van $A\mathbf{x} = \text{proj}_{\text{Col}(A)} \mathbf{b} = \mathbf{p}$, en bij (a) hebben we gezien dat $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0)$ voldoet.
- De langzame manier: los op $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ (of vind daar één oplossing van).

8. (a) Niet waar: bijvoorbeeld het stelsel met de twee vergelijkingen $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ en $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$ heeft geen oplossingen
- (b) Niet waar: het nulpolynoom heeft deze eigenschap niet en behoort daarom niet tot W . W kan dus geen deelruimte van $\mathbb{P}_3$ zijn.
- (c) Stel dat λ een eigenwaarde is van A en dat $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ een bijbehorende eigenwaarde is. Dan geldt $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ en $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Omdat $A^2 = A$ moet ook $\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Gelukkig is $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, waardoor we mogen concluderen dat $\lambda = \lambda^2$, zodat $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.