



Tentamen lineaire algebra voor BWI
 maandag 15 december 2008, 15.15-18.00 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vijf op te tellen en vervolgens te delen door vijf.

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 4 \\ 2 & 4 & 4\alpha \\ -2 & -4 & -2\alpha^2 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$ waarbij α en β reële getallen zijn.

- (3) (a) Voor welke waarden van α en β heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ géén oplossingen?
- (2) (b) Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op voor $\alpha = 0$ en $\beta = 0$.
- (2) (c) Is de bij het vorige onderdeel gevonden oplossingsverzameling een deelruimte van $\mathbb{R}^3$?
- (1) (d) Voor welke waarden van α spannen de kolommen van A heel $\mathbb{R}^3$ op?

2. Gegeven is de matrix A die we alvast een stukje geveegd hebben tot matrix F :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F.$$

Verder is $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, waarbij $\mathbf{v}_1$ de eerste kolom van A is, $\mathbf{v}_2$ de tweede, enzovoorts.

- (2) (a) Waar of niet waar: $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Vergeet niet uit te leggen waarom!
- (2) (b) Geef een basis voor W .
- (1) (c) Vormen de eerste, tweede en vierde kolom van F een basis voor W ?
- (2) (d) Is $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$ een basis voor W ?

3. Gegeven is de deelruimte W van $\mathbb{R}^4$ met basis

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (3½) (a) Bepaal die vector $\mathbf{w}$ in W waarvan de afstand tot de vector $\mathbf{b} = (5, 8, 0, 9)^T$ minimaal is en bereken deze afstand.
- (1½) (b) Geef een vector $\mathbf{v}$ ongelijk aan $\mathbf{b}$ en $\mathbf{w}$ waarvoor ook geldt dat $\mathbf{w}$ de vector uit W is waarvan de afstand tot $\mathbf{v}$ minimaal is.
- (2) (c) Bepaal een basis voor het orthogonale complement van W .

4. Gegeven zijn de volgende matrices en vector:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Verder $A = PDP^{-1}$. Beantwoord de volgende vragen zonder P^{-1} en/of A uit te rekenen! Geef argumenten!

- (2) (a) Is $(1, 0, -1)^T$ een eigenvector van A ? En $(4, 1, -1)^T$? Leg uit!
- (1) (b) Bepaal $\det(A)$.
- (2) (c) Schrijf $A^k \mathbf{b}$ als lineaire combinatie van eigenvectoren van A (hierbij is k een geheel getal).
- (2) (d) Geef een basis voor $\text{Nul}(A + 2I)$.

5. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (5) (a) Welke van deze matrices zijn diagonaliseerbaar en welke niet? Dit kan met relatief weinig rekenwerk beantwoord worden.
- (2) (b) Welke van deze matrices zijn orthogonaal diagonaliseerbaar en welke niet?

- (3) 6. Voor welke waarden van a en b is de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}$ symmetrisch en positief definit?

7. Bewijs of weerleg:

- (2) (a) Als A een symmetrische $n \times n$ matrix is en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, dan geldt $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$.
- (2) (b) De deelverzameling W van $\mathbb{P}_3$, die bestaat uit alle polynomen van graad 2, is een deelruimte van $\mathbb{P}_3$.
- (2) (c) Gegeven is dat voor een $m \times n$ matrix A en een stel vectoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ in $\mathbb{R}^n$ geldt dat $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_p\}$ onafhankelijk is. Dan is $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ ook onafhankelijk.