

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Lineaire Algebra voor BWI
Afdeling Wiskunde	08:45-11:30 uur
Vrije Universiteit	17-12-2007

Normering

1 : 15	2 : a) 4 b) 4 c) 4 d) 3	3 : 15	4 : a) 5 b) 5 c) 5	5 : a) 5 b) 5 c) 5	6 : a) 9 b) 6
15	15	15	15	15	15

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{10} + 1$$

Opgaven

1. De matrix A is gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 10 & 6 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 2 & 10 & 6 & 3 & 21 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de gereduceerde echelonvorm van A .

2. De matrix B is gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de inverse van B door Gauss eliminatie.
- Bepaal de inverse van B met behulp van de regel van Cramer.
- Bepaal de inverse van B door gebruik te maken van de orthogonaliteit van de kolommen van B .
- Bereken de determinant van B^{-1} .

3. Zij $\mathbb{P}$ de ruimte van polynomen in t . Beschouw de operatoren $\frac{d}{dt}$ en $\frac{d}{dt} - 1$ als lineaire afbeeldingen van $\mathbb{P}$ naar zichzelf. Bepaal voor beide operatoren kern (kernel) en beeld (range).

4. Beschouw de differentievergelijking $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, met

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix},$$

met $0 \leq p, q \leq 1$.

- Laat zien dat 1 een eigenwaarde is van A .
 - Bereken de andere eigenwaarde.
 - Voor welke waarden van p en q gaat iedere oplossing van de differentievergelijking naar een eindige limiet voor $k \rightarrow \infty$? Bereken in dit geval de limiet expliciet.
5. Zij $\mathbb{P}$ de ruimte van polynomen in t . Definieer $(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Zij $W = \text{Span}\{t-1, t^2+2, t^3-3\}$.

- Laat zien dat $(\cdot, \cdot)$ een inproduct definieert op $\mathbb{P}$.
 - Vind met behulp van het Gram-Schmidt proces een orthogonale basis van W .
 - Bereken de orthogonale projectie van $t^4 \in \mathbb{P}$ op W .
6. Gegeven is de kwadratische vorm $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$.
- Voer een (niet noodzakelijk orthogonale) basistransformatie $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ uit die $Q(\mathbf{x})$ omzet in een kwadratische vorm zonder gemengde producten.
 - Laat zien dat de kwadratische vorm $Q(\mathbf{x})$ indefiniet is.