

1. De matrix  $A$  is gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) ~~Bepaal de rang van de matrix  $A$ .~~  
b) Geef een basis voor de nulruimte van  $A$ .  
c) Geef een basis voor  $(\text{Nul } A)^\perp$ .
2. Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + y = 2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

3. De matrix  $B$  en de vector  $\mathbf{v}$  zijn gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Bepaal de eigenwaarden van  $B$ .  
b) Bepaal de eigenvektoren van  $B$ .  
c) Licht toe dat  $B$  diagonaliseerbaar is en geef een inverteerbare matrix  $P$  en een diagonaalmatrix  $D$  zo dat  $B = PDP^{-1}$ .  
d) Licht toe dat  $B$  inverteerbaar is en bepaal vervolgens de eigenwaarden en een basis voor de bijbehorende eigenruimten van  $B^{-1}$ .
4. Gegeven is de kwadratische vorm  $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$ .
- a) Voer een basistransformatie  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  uit die  $Q(\mathbf{x})$  omzet in een kwadratische vorm zonder gemengde producten.  
b) Laat zien dat de kwadratische vorm  $Q(\mathbf{x})$  indefiniet is.

**Z.O.Z.**

5. De deelruimte  $V \subset \mathbb{R}^3$  wordt gegeven door

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

- a) Toon aan dat de dimensie van  $V$  gelijk is aan 2.
  - b) Geef een orthogonale basis is voor  $V$ .
  - c) Toon aan dat de dimensie van  $V^\perp$  gelijk is aan 1.
  - d) Bereken  $V^\perp$ .
6. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- a)  $A$  is een  $m \times n$  matrix. Als  $n > m$  dan heeft het stelsel  $Ax = 0$  niet-triviale oplossingen.
  - b) Als  $A$  en  $B$   $n \times n$ -matrices zijn, met  $AB = I_n$  ( $I_n$  is de eenheidsmatrix in  $\mathbb{R}^n$ ), dan geldt  $BA = I_n$ .
  - c) Er bestaan matrices  $A$  waarvoor geldt  $\text{Col } A = \mathbb{R}^4$  en  $\text{Nul } A = \mathbb{R}^2$ .
  - d)  $A$  is een reële, inverteerbare  $n \times n$  matrix. Dan is  $\det(A^T A) > 0$ .
7. a) Laat  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n, m \geq 3$ , een lineaire transformatie zijn, en laat  $\{v_1, v_2, v_3\}$  een lineair onafhankelijke verzameling zijn. Geef een eigenschap waaraan  $T$  moet voldoen opdat  $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$  ook een lineair onafhankelijke verzameling is.
- b) Laat  $T : V \rightarrow W$  een lineaire transformatie zijn van een vectorruimte  $V$  naar een vectorruimte  $W$ . Toon aan dat de nulruimte van  $T$  een deelruimte is van  $V$ .

#### Normering:

|          |       |          |          |          |          |          |
|----------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 : a) 2 | 2 : 3 | 3 : a) 1 | 4 : a) 3 | 5 : a) 1 | 6 : a) 3 | 7 : a) 2 |
| b) 2     |       | b) 3     | b) 2     | b) 2     | b) 3     | b) 3     |
| c) 2     |       | c) 2     |          | c) 3     | c) 2     |          |
|          |       | d) 3     |          | d) 1     | c) 2     |          |
| <hr/>    | <hr/> | <hr/>    | <hr/>    | <hr/>    | <hr/>    | <hr/>    |
| 6        | 3     | 9        | 5        | 7        | 10       | 5        |

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$