

1. De matrix A is gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$



- Bepaal de rang van de matrix A .
 - Geef een basis voor de nulruimte van A .
 - Geef twee lineair onafhankelijke vectoren uit $(\text{Nul } A)^\perp$, het orthogonale complement van de nulruimte van A .
2. Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ x + 3y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

3. De matrix B en de vector $\mathbf{v}$ zijn gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van B en geef de bijbehorende eigenwaarde.
 - Laat zien dat 3 een eigenwaarde is van B en bepaal een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
 - Licht toe dat B diagonaliseerbaar is en geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat $B = PDP^{-1}$.
 - Licht toe dat B inverteerbaar is en bepaal vervolgens de eigenwaarden en een basis voor de bijbehorende eigenruimten van B^{-1} .
4. Gegeven is de kwadratische vorm $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$.
- Voer een basistransformatie $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ uit die $Q(\mathbf{x})$ omzet in een kwadratische vorm zonder gemengde producten.
 - Laat zien dat de kwadratische vorm $Q(\mathbf{x})$ indefiniet is.

5. De deelruimte $V \subset \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \right\}.$$

Verder zijn gegeven de vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en $\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}$ door

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Toon aan dat de dimensie van V gelijk is aan 2.
 - b) Bewijs dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ een orthogonale basis is voor V .
 - c) Laat zien dat $\hat{\mathbf{y}}$ de orthogonale projectie is van $\mathbf{y}$ op V .
 - d) Bepaal de coördinaatvector $[\hat{\mathbf{y}}]_{\mathcal{B}}$ van $\hat{\mathbf{y}}$ t.o.v. de basis $\mathcal{B}$.
6. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.
- a) A is een $m \times n$ matrix. Als $n > m$ dan heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oplossingen voor alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
 - b) Laat A, B en C $n \times n$ matrices zijn. Als $A = BC$ en A is inverteerbaar, dan zijn ook B en C inverteerbaar.
 - c) Als matrix A gelijkvormig (similar) is met matrix B , dan is A^2 gelijkvormig met B^2 .
 - d) Er bestaan matrices A waarvoor geldt $\text{Col } A = \mathbb{R}^4$ en $\text{Nul } A = \mathbb{R}^2$.
 - e) A is een reële, inverteerbare $n \times n$ matrix. Dan is $\det(A^T A) > 0$.
7. a) Laat $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire transformatie zijn, en laat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een lineair afhankelijke verzameling zijn. Toon aan dat $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$ ook een lineair afhankelijke verzameling is.
- b) Laat $T : V \rightarrow W$ een lineaire transformatie zijn van een vectorruimte V naar een vectorruimte W . Toon aan dat het bereik van T een deelruimte is van W .

Normering:

1 : a) 2	2 : 3	3 : a) 1	4 : 5	5 : a) 1	6 : 10	7 : a) 2
b) 2		b) 3		b) 2		b) 3
c) 2		c) 2		c) 3		
		d) 3		d) 1		
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
6	3	9	5	7	10	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$