

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ worden gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 b) (i) Geef een basis voor de kolomruimte van A .
 (ii) Geef een basis voor de rijruimte van A .

2. De matrix B is gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 6 & -2 & 9 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

- a) Bereken $\det(B^3)$.
 b) Bepaal de eigenwaarden van B en geef een basis voor de bijbehorende eigenruimten.
 c) Is B diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.
3. $\mathbb{P}_3$ is de vectorruimte van alle polynomen $\mathbf{p}$ van de graad kleiner dan of gelijk aan 3, inclusief het nulpolynoom. De polynomen $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_3$ zijn gegeven door

$$p_1(t) = t^3 - t, \quad p_2(t) = t^2 - 1 \quad \text{en} \quad p_3(t) = t^3 - t^2.$$

Ga na of de volgende beweringen waar zijn [motiveer je antwoorden]:

- a) $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ is een lineair onafhankelijke verzameling in $\mathbb{P}_3$.
 b) $\text{Span}\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\} = \mathbb{P}_3$.

$M_{2 \times 2}$ is de vectorruimte van alle 2×2 matrices. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow M_{2 \times 2}$ wordt gedefinieerd door:

$$T(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) & \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(1) & \mathbf{p}(0) \end{pmatrix}.$$

- c) Geef een basis voor het bereik (range) van T .
 d) Geef een basis voor de kern (kernel) van T .

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en de lineaire deelruimte $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

- Bepaal, m.b.v. het Gram-Schmidt proces, een orthogonale basis voor V .
- Bepaal $\hat{y}$, de orthogonale projectie van y op V .
- Geef een basis voor $V^\perp$.

5. Bepaal de kleinste-kwadraten oplossing van het inconsistente stelsel

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

6. Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- Laat A een 3×2 matrix zijn met twee pivotkolommen. Dan heeft de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minimaal één oplossing voor iedere $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
- De functie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $T(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ is een lineaire transformatie.
- Laat A een inverteerbare 2×2 matrix zijn. Laat B en C 2×2 matrices zijn. Als $C = ABA^{-1}$, dan hebben B en C dezelfde eigenwaarden.
- Laat A een symmetrische 3×3 matrix zijn. Als de kwadratische vorm $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ positief definit is, dan is A inverteerbaar.

- Laat A en B $m \times n$ matrices zijn en laat C een inverteerbare $n \times n$ matrix zijn. Toon aan: als $A = BC$, dan hebben A en B dezelfde kolomruimte.
 - Laat U een orthogonale $n \times n$ matrix zijn. Definieer $P = UU^T$ en $Q = I_n - 2P$ (hierbij is I_n de $n \times n$ identiteitsmatrix). Toon aan:

$$(i) P^2 = P \quad (ii) Q^2 = I_n.$$

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 2	3 : a) 2	4 : a) 3	5 : 3	6 : 8	7 : a) 4
b) 3	b) 4	b) 1	b) 2			b) 3
	c) 1	c) 2	c) 2			
		d) 2				
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
6	7	7	7	3	8	7

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{5} + 1$$