

$$1. a) \left( A \mid I \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

kies  $x_3$  vrij. Dan:  $x_4 = 1$ ,  $x_2 = 1 + 2x_3$  en  $x_1 = 2 - 2x_3$ .

Dus:  $x = (2, 1, 0, 1) + x_3(-2, 2, 1, 0)$  ( $x_3 \in \mathbb{R}$ ).

b) i) Pivots in kolommen 1, 2 en 4. Dus kies  $1^e$ ,  $2^e$  en  $4^e$  kolom van  $A$  als basis

ii)  $\text{Row}(A) = \text{Row}(U)$  als  $U$  is kolom van  $A$ . Dus kies  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  als basis

$$2. a) \det B = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 6 & -2 & 9 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(3-3) = 0,$$

dus  $\det B^3 = (\det B)^3 = 0$ .

$$b) \begin{vmatrix} B - \lambda I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -6 \\ 6 & -2-\lambda & 9 \\ 4 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -6 \\ 3-\lambda & -\lambda & 3 \\ 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -6 \\ -\lambda & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -6 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (-\lambda) = 0, \text{ dus } \lambda_1 = 0 \text{ en } \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

$$\lambda = 0: Bx = 0 \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dus bv } \left\{ x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ vormt een basis.}$$

$$\lambda = 1: (B - I)x = 0 \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dus bv } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ vormt een basis}$$

c) Ja, want algebraïsche multiplicitéit( $\lambda$ ) = meetkundige multiplicitéit( $\lambda$ ) voor elk  $\lambda$ .

3. a) Waar. Stel  $c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 = 0$ , dus  $(c_1 + c_3)t^3 + (c_2 - c_3)t^2 - c_1 t - c_2 = 0$ .  
Daaruit volgt  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Dus stelsel lineair onafhankelijk.

b) Niet waar. Dimensie  $\mathbb{P}_3 = 4$ , dus 3 polynomen kunnen niet  $\mathbb{P}_3$  opspannen.

c) 
$$\begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(0) \end{pmatrix} = p(0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dus bv } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ basis.}$$

d) Er moet gelden  $p(0)=0$  en  $p(1)=0$ . Voor willekeurige  $p(t)=a+bt+ct^2+dt^3$  moet dus gelden  $a=0$  en  $b+c+d=0$ , dus  $p(t)=c(t^2-t)+d(t^3-t)$ . Een basis voor kern  $T$  is dus bv  $\{t^2-t, t^3-t\}$ .

4. a) Kies  $x_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Dan  $x_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

En verder:  $x_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} x_1 - \frac{v_3 \cdot x_2}{x_2 \cdot x_2} x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $\hat{y} = \frac{y \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} x_1 + \frac{y \cdot x_2}{x_2 \cdot x_2} x_2 + \frac{y \cdot x_3}{x_3 \cdot x_3} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c)  $V^\perp$  moet één-dimensionaal zijn, want  $V$  is 3-dimensionaal. We weten:  $y = \hat{y} + z$  met  $z \in V^\perp$ . Dus  $z = y - \hat{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  is een basisvector voor  $V^\perp$ . (kan ook door  $z \cdot x_1 = 0$  en  $z \cdot x_2 = 0$  en  $z \cdot x_3 = 0$  te berekenen.)

5. Hier staat  $Ax = b$  met  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . De kleinste-

kwadraat oplossing  $\hat{x}$  vinden we via  $A^T A \hat{x} = A^T b$ , dus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ dus } \hat{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

6. a) Niet waar.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  heeft geen oplossingen.

b) Niet waar.  $T(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \sqrt{2}$ , terwijl  $2 \cdot T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 1 = 2$ .  
Dus er is niet voldaan aan  $T(cx) = c \cdot T(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$

c) Waar.  $\det(C - \lambda I) = \det(ABA^{-1} - \lambda I) = \det(A(B - \lambda I)A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \cdot \det(B - \lambda I) = \det(AA^{-1}) \cdot \det(B - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$ .

d) Waar. Stel  $A$  niet-inverteerbaar. Dan  $\exists \underline{x} \neq \underline{0}$ : dat  $A\underline{x} = \underline{0}$ , maar dan geldt ook  $\underline{x}^T A \underline{x} = 0$  en dat is in tegenspraak met  $\underline{x}^T A \underline{x} > 0 \ \forall \underline{x} \neq \underline{0}$ .

7. a) i. Kies  $\underline{x} \in \text{Col } A$ . Dan is er een  $\underline{y}$  zo dat  $\underline{x} = A \cdot \underline{y} = B \cdot C \cdot \underline{y} = B \cdot \underline{v}$   
Dus is ook  $\underline{x} \in \text{Col } B$ .

ii. Kies  $\underline{x} \in \text{Col } B$ . Dan is er een  $\underline{y}$  zo dat  $\underline{x} = B \cdot \underline{y} = A \cdot C^T \underline{y} = A \cdot \underline{v}$   
Dus is ook  $\underline{x} \in \text{Col } A$ .

Conclusie:  $\text{Col } A = \text{Col } B$ .

b) i.  $P^2 = (U \cdot U^T)^2 = U \cdot U^T \cdot U \cdot U^T = U \cdot I \cdot U^T = U \cdot U^T = P$

ii.  $Q^2 = (I_n - 2P)^2 = I_n - 4P + 4P^2 = I_n - 4P + 4P = I_n$   
(met gebruikmaking van i.)